XVII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania zadań konkursowych - klasy drugie

29 marca 2025 r.

1. Wyznacz wszystkie trójki parami różnych dodatnich liczb całkowitych (k, m, n) dla których zachodzi nierówność
$$k^2 + m^2 + n^2 \leqslant \frac{7}{3} \cdot (k + m + n).$$
Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

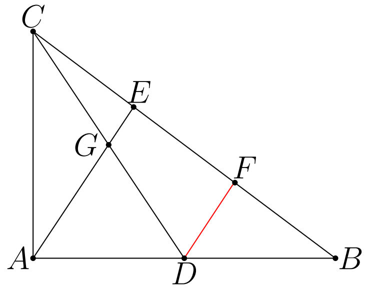
Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $k < m < n$. Jeśli $n = 3$, to oczywiście $k = 1$ i $m = 2$ oraz $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \frac{7}{3}(1 + 2 + 3)$.

Niech dalej $n \geqslant 4$. Mamy tożsamość
$$x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4},$$
a więc
$$k^2 + m^2 + n^2 - \frac{7}{3} \cdot (k + m + n) = \left(k - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(m - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(n - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{12}.$$
Rozważana nierówność jest zatem równoważna następującej
$$\left(k - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(m - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(n - \frac{7}{6}\right)^2 \leqslant \frac{49}{12}. \tag{1}$$

Ponieważ $n \geqslant 4$, więc lewa strona powyższej nierówności jest większa od
$$\left(1 - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(4 - \frac{7}{6}\right)^2 > \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{314}{36} > \frac{49}{6}.$$
Zatem tylko trójka $(1, 2, 3)$ spełnia nierówność (1). □

2. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB, zaś punkt E leży na boku BC i spełnia równość $|BE| = 2|CE|$. Wykaż, że jeśli kąty $\sphericalangle DAE$ i $\sphericalangle ADC$ są równe, to trójkąt ABC jest prostokątny.

Rozwiązanie.



Oznaczmy przez G punkt przecięcia AE z CD oraz przez F środek odcinka BE. W trójkącie ABE odcinek FD łączy środki boków, więc jest równoległy do AE. Ponieważ E jest środkiem odcinka CF i $DF \| EG$ punkt G jest środkiem odcinka CD. Z założenia wynika, że trójkąt ADG jest równoramienny, a stąd $|GA| = |GD| = |GC|$. Punkty A, D, C leżą więc na okręgu o środku G, którego średnicą jest CD. Kąt $\sphericalangle BAC$ jest zatem prosty. $\square$

3. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, y spełniające układ równań

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 4\ . \end{cases}$$

Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie, sposób I. Przyjmijmy oznaczenie $t = xy$. Mamy zależności: $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4 - 2t$ oraz $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 2 \cdot (4 - 3t)$. Drugie równanie układu przyjmuje postać $(4-2t)(8-6t) = 4$, czyli $3t^2 - 10t + 7 = 0$. Stąd $t = 1$ lub $t = \frac{7}{3}$. Mamy więc dwa układy równań:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \dfrac{7}{3}\ . \end{cases}$$

Pierwszy układ, po podstawieniu $y = 2 - x$, sprowadza się do równania $(x - 1)^2 = 0$, czyli $x = y = 1$. Drugi układ sprowadza się do równania $x^2 - 2x + \frac{7}{3} = 0$, które nie ma pierwiastków rzeczywistych. Ostatecznie jedynym rozwiązaniem rozważanego układu jest $x = y = 1$.

Rozwiązanie, sposób II. Bezpośrednie podstawienie $y = 2 - x$ do drugiego równania daje równanie:

$$(2x^2 - 4x + 4)(6x^2 - 12x + 8) = 4,$$

a w konsekwencji

$$3x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 20x + 7 = 0.$$

Ponieważ $x = 1$ jest pierwiastkiem powyższego równania wykonując dzielenie przez $x - 1$ otrzymujemy rozkład na czynniki:

$$(x - 1)(3x^3 - 9x^2 + 13x - 7) = 0.$$

Zauważmy, że $x = 1$ jest również pierwiastkiem drugiego czynnika, a więc równanie przyjmuje postać

$$(x - 1)^2(3x^2 - 6x + 7) = 0.$$

Trójmian kwadratowy $3x^2 - 6x + 7$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, gdyż $6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 < 0$. Tak więc jedynym rzeczywistym pierwiastkiem rozważanego równania jest $x = 1$, a zatem $x = y = 1$.

Rozwiązanie, sposób III. Przyjmijmy $x = t + 1$. Wówczas $y = 2 - x = 1 - t$. Zauważmy, że

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 2\left((t + 1)^2 + (t - 1)(t + 1) + (1 - t)^2\right) = 2(3t^2 + 1)$$

oraz

$$x^2 + y^2 = (t + 1)^2 + (1 - t)^2 = 2t^2 + 2$$

Drugie równanie układu przyjmuje zatem postać:

$$(t^2+1)(3t^2+1)=1.$$

Ponieważ $t^2+1 \geqslant 1$ i $3t^2+1 \geqslant 1$, powyższe równanie zachodzi tylko dla $t=0$. Stąd $x=y=1$.

4. Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą niepodzielną przez 3. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej m liczba

$$(m+1)^2+(m+2)^2+(m+3)^2+\ldots+(m+9k-1)^2+(m+9k)^2$$

nie jest potęgą liczby całkowitej, tzn. nie jest postaci n^l, gdzie n,l są liczbami całkowitymi i $l>1$.

Rozwiązanie. Ponieważ mamy tożsamości:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{oraz} \quad 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

rozważana w zadaniu suma jest równa:

$$\begin{aligned} S &= 9km^2+2m(1+2+\ldots+9k)+(1^2+2^2+\ldots+(9k)^2) \\ &= 9km^2+9km(9k+1)+\frac{3k(9k+1)(18k+1)}{2} \\ &= 3\cdot\left(3km^2+3km(9k+1)+\frac{1}{2}k(9k+1)(18k+1)\right) \end{aligned}$$

Z założenia wynika, że liczba w nawiasie jest niepodzielna przez 3. Zatem $3 \mid S$, lecz $3^2 \nmid S$. Stąd wnosimy, że S nie jest potęgą liczby całkowitej. □

Uwaga. Fakt, że liczba $1^2+2^2+\ldots+(9k)^2$ jest podzielna przez 3 i niepodzielna przez 9 można uzasadnić bez znajomości sumy kwadratów kolejnych liczb naturalnych. Liczba ta jest sumą $3k$ składników postaci

$$(3i+1)^2+(3i+2)^2+(3i+3)^2=27i^2+36i+14,$$

gdzie $i=0,1,\ldots,3k-1$. Składniki te dają resztę 5 przy dzieleniu przez 9. Stąd wynika, że rozważana suma kwadratów jest podzielna przez 3, lecz nie jest podzielna przez 9, bo $9 \nmid 3k\cdot 5$.