



XIV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy trzecie

28 maja 2022 r.

1. Na płaszczyźnie dane są dwa różne punkty A i B . Jaki zbiór tworzą punkty symetryczne do A względem prostych przechodzących przez punkt B ?

Rozwiązanie.

Punkty te tworzą okrąg ω o promieniu $|AB|$ i środku w B .

Faktycznie, jeśli X jest symetryczny do A względem pewnej prostej przechodzącej przez B , to $|XB| = |AB|$, więc X leży na okręgu ω . Odwrotnie, jeśli Y leży na okręgu ω , to $|YB| = |AB|$. Trójkąt ABY jest więc równoramienny, a to oznacza, że symetralna boku AY przechodzi przez B . Punkt Y jest odbiciem A względem tej symetralnej, zatem należy do zbioru z zadania.

2. Znajdź najmniejszą liczbę rzeczywistą r taką, że dla każdego trójkąta prostokątnego, jeśli oznaczmy przez a , b długości jego przyprostokątnych, a przez c długość przeciwprostokątnej, to zachodzi

$$a + b \leq r \cdot c.$$

Rozwiązanie.

Jeśli weźmiemy trójkąt prostokątny równoramienny, to zachodzi $a = b$ i $c = a \cdot \sqrt{2}$, zatem $r \geq \sqrt{2}$. Pokażemy, że $r = \sqrt{2}$ spełnia warunki zadania.

Wyberzmy dowolny trójkąt jak w zadaniu. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Chcemy więc pokazać, że

$$a + b \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

Po podniesieniu do kwadratu (strony są dodatnie) otrzymujemy $a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, co jest równoważne nierówności $0 \leq (a - b)^2$, która jest prawdziwa. To kończy dowód.

3. Liczby $1, 2, \dots, 2022$ ustawiono w ciąg $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ w ten sposób, że iloczyn

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_{2022} - 2022)$$

jest parzysty. Na ile sposobów można to zrobić?

Rozwiązanie.

Obliczmy najpierw, na ile sposobów można ustawić te liczby tak, by iloczyn z zadania był *nieparzysty*. Iloczyn jest nieparzysty wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z czynników jest nieparzysty, zatem liczby $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2022}$ muszą być nieparzyste, zaś liczby $a_1, a_3, \dots, a_{2021}$ parzyste. To znaczy, że $a_2, a_4, \dots, a_{2022}$ są pewną permutacją liczb $1, 3,$

$\dots$, 2021. Takich permutacji jest $1011!$. Analogicznie, ciąg $a_1, a_3, \dots, a_{2021}$ jest pewną permutacją ciągu $2, 4, \dots, 2022$. Takich permutacji też jest $1011!$. Łącznie, sposobów ustawienia z iloczynem nieparzystym jest $(1011!)^2$. Wszystkich sposobów ustawienia jest $2022!$, więc ostatecznie *jest* $2022! - (1011!)^2$ *sposobów ustawień z zadania*.

4. Czy istnieją liczby całkowite x, y takie, że $x^3 + y^3 = 28052022$?

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez N liczbę 28052022. Suma cyfr liczby N to 21, zatem liczba ta jest podzielna przez 3, ale nie przez 9. Załóżmy, że liczby całkowite x i y spełniają równanie $x^3 + y^3 = N$. Zauważmy, że wtedy

$$N = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)((x + y)^2 - 3xy).$$

Skoro 3 dzieli N , to dzieli ono liczbę $x + y$ lub liczbę $(x + y)^2 - 3xy$. W obu przypadkach wynika stąd, że 3 dzieli $x + y$. Jeśli jednak 3 dzieli $x + y$, to dzieli ono *obie* liczby $x + y$ oraz $(x + y)^2 - 3xy$, czyli 9 dzieli N , sprzeczność. Ostatecznie, liczby o żądanych własnościach nie istnieją.

Rozwiązanie, sposób drugi

Oznaczmy przez N liczbę 28052022. Suma cyfr liczby N to 21, zatem liczba ta daje resztę 3 przy dzieleniu przez 9. Obliczmy najpierw, jaka może być reszta z dzielenia przez 9 sześcianu liczby całkowitej. Wystarczy to sprawdzić dla liczb $0, 1, \dots, 8$. Aby ułatwić sobie nieco obliczenia, sprawdzamy zamiast tego liczby $-4, -3, \dots, 4$:

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$n^3 \pmod{9}$	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1

Z tabeli wynika, że możliwe reszty to $-1, 0, 1$, czy, mówiąc bardziej tradycyjnie, reszty $8, 0, 1$. Żadne dwie z tych liczb nie sumują się do liczby dającej resztę 3, więc równanie z zadania nie ma rozwiązań całkowitych.

[pg, jj]