



VIII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy drugie

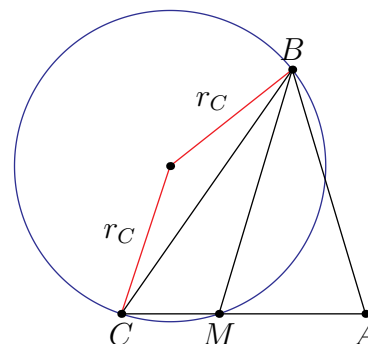
14 maja 2016 r.

1. Dany jest trójkąt ABC . Na prostej AC wyznacz punkt M taki, że suma promieni okręgów opisanych na trójkątach ABM oraz CBM jest najmniejsza. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Niech r_A będzie środkiem okręgu opisanego na ABM , zaś r_C będzie środkiem okręgu opisanego na CBM . Odcinki AB i BC są cięciwami w tych okręgach, więc $AB \leq 2r_A$ oraz $BC \leq 2r_C$, czyli

$$r_A + r_C \geq \frac{AB + BC}{2}. \quad (1)$$



Jeżeli za M przyjmiemy spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka B trójkąta ABC , to kąty BMA , BMC są proste, więc AB i BC pokrywają się ze średnicami odpowiadających okręgów i nierówność (1) staje się równością. Zatem M jest szukanym punktem.

Warto podkreślić, że M jest jedynym punktem, dla którego $AB = 2r_A$ i $BC = 2r_C$, więc jedynym punktem dla którego suma promieni jest najmniejsza.

2. Dla jakich wartości parametru rzeczywistego a wielomian $x^3 - 6x^2 + ax - 8$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3 spełniające równość

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 3 ?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Stosując trzykrotnie twierdzenie Bézouta możemy zapisać

$$x^3 - 6x^2 + ax - 8 = b(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \quad (2)$$

Ponadto $b = 1$ jak wynika z porównania współczynników przy x^3 . Porównując strony równania (2), otrzymujemy

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a, \quad x_1x_2x_3 = 8.$$

Stąd $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 36 - 2a$, więc

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3 = 36 - 2a - 12 + 3.$$

Wyrażenie to jest równe 3 dokładnie gdy $a = 12$.

Z powyższego wynika, że wielomian z zadania to $(x - 2)^3$.

3. Niech M będzie maksymalną odległością, zaś m minimalną odległością między wierzchołkami pewnego czworokąta wypukłego. Wykaż, że $M \geq \sqrt{2} \cdot m$.

Rozwiązanie.

Suma kątów w czworokącie z zadania wynosi 360° , zatem co najmniej jeden z nich ma miarę $\geq 90^\circ$. Oznaczmy wierzchołki tak, by był to kąt ABC . Niech β oznacza jego miarę. Skoro $90^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$, to $\cos \beta \leq 0$. Z twierdzenia cosinusów wynika, że

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos \beta \geq |AB|^2 + |BC|^2 \geq m^2 + m^2 = 2m^2.$$

Zatem $M \geq |AC| \geq \sqrt{2} \cdot m$.

4. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (a, b) takich, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n liczba

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^n + \left(b + \frac{1}{2}\right)^n$$

jest całkowita.

Rozwiązanie.

Teza jest równoważna stwierdzeniu, że 2^n dzieli liczbę

$$2^n \cdot \left(\left(a + \frac{1}{2}\right)^n + \left(b + \frac{1}{2}\right)^n \right) = (2a + 1)^n + (2b + 1)^n.$$

Zauważmy na początek, że jeśli $a + b + 1 = 0$, to $2a + 1 = -(2b + 1)$, więc dla każdego n nieparzystego liczba

$$(2a + 1)^n + (2b + 1)^n = (2a + 1)^n + (-(2a + 1))^n = 0$$

jest podzielna przez 2^n . Pokażemy, że to jedyna możliwość: każda para (a, b) spełniająca tezę zadania spełnia także równanie $a + b + 1 = 0$.

Weźmy parę (a, b) spełniającą tezę zadania. Ze wzoru Newtona wiemy, że

$$(2a + 1)^n = 2^n a^n + \binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} a^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-2} \cdot 4a^2 + n \cdot 2a + 1.$$

Wobec tego $(2a + 1)^n$ daje tę samą resztę z dzielenia przez 4 co liczba $2an + 1$. Analogicznie rozumując dla $(2b + 1)^n$ stwierdzamy, że $(2a + 1)^n + (2b + 1)^n$ daje tę samą resztę z dzielenia przez 4 co liczba $2an + 1 + 2bn + 1 = 2(a + b)n + 2$. Jeżeli n jest parzyste, to 4 nie dzieli $2(a + b)n + 2$. Zatem 4, a tym bardziej 2^n , nie dzieli $(2a + 1)^n + (2b + 1)^n$.

Wnioskujemy stąd, że dla nieskończenie wielu n nieparzystych liczba $(2a + 1)^n + (2b + 1)^n$ jest podzielna przez 2^n . Możemy teraz wziąć takie n nieparzyste i zastosować wzór skróconego mnożenia

$$(2a + 1)^n + (2b + 1)^n = (2a + 1 + 2b + 1) \left((2a + 1)^{n-1} - (2a + 1)^{n-2}(2b + 1) + \dots - (2a + 1)(2b + 1)^{n-2} + (2b + 1)^{n-1} \right).$$

Liczba $(2a + 1)^{n-1} - (2a + 1)^{n-2}(2b + 1) + \dots - (2a + 1)(2b + 1)^{n-2} + (2b + 1)^{n-1}$ jest sumą n liczb nieparzystych. Skoro n jest nieparzysta, to i ta liczba jest nieparzysta.

Zatem 2^n dzieli liczbę $2a + 1 + 2b + 1 = 2(a + b + 1)$. Ta podzielność zachodzi dla nieskończenie wielu liczb n . To może się zdarzyć tylko jeśli $2(a + b + 1) = 0$.

Odpowiedź: Zależność z zadania spełniają pary liczb takich, że $a + b + 1 = 0$, czyli $b = -a - 1$, i tylko takie pary.