XI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy drugie

13 kwietnia 2019 r.

1. Liczby całkowite dodatnie x, y, z, t spełniają równanie

$$x \cdot 2^x + y \cdot 2^y = z \cdot 2^z + t \cdot 2^t.$$

Pokaż, że $x + y = z + t$.
Rozwiązanie.
Jeśli $x > z$ i $x > t$, to mamy $x - 1 \geqslant z, t$, więc

$$x \cdot 2^x = (x-1) \cdot 2^x + 2^x > (x-1) \cdot 2^x = (x-1) \cdot 2^{x-1} + (x-1) \cdot 2^{x-1} \geqslant t \cdot 2^t + z \cdot 2^z,$$

zatem lewa strona równania z zadania nie może równać się prawej. Pokazaliśmy więc, że $x \leqslant \max(z, t)$. Powtarzając to rozumowanie dla y zamiast x, stwierdzamy, że zachodzi $y \leqslant \max(z, t)$. Łącznie uzyskujemy $\max(x, y) \leqslant \max(z, t)$.

Rozumując symetrycznie dla z i t stwierdzamy, że $z, t \leqslant \max(x, y)$, czyli $\max(x, y) = \max(z, t)$. Ewentualnie zmieniając oznaczenia, możemy uznać, że $x = \max(x, y)$ i $z = \max(z, t)$. Wtedy $x = z$ i równanie z zadania redukuje się do $y \cdot 2^y = t \cdot 2^t$. Ale funkcja $a \mapsto a \cdot 2^a$ jest rosnąca dla $a > 0$, więc $y = t$. Zatem $x + y = z + t$.

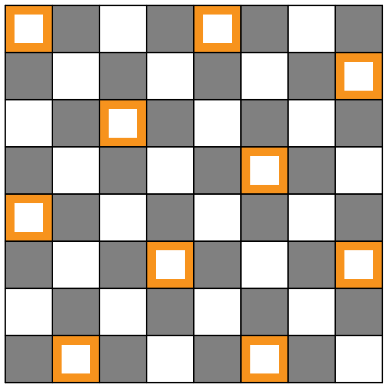
2. Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są środkami okręgów o_1, o_2, o_3, które mają równe promienie. Spośród sześciu punktów przecięcia tych okręgów trzy — nazwijmy je D, E, F — leżą we wnętrzu trójkąta ABC. Oblicz miary kątów trójkąta DEF; odpowiedź uzasadnij.
Rozwiązanie.
Dla każdej pary okręgów, jeden ich punkt przecięcia leży wewnątrz ABC, a drugi na zewnątrz. Załóżmy, że D jest punktem przecięcia o_2 i o_3, E jest punktem przecięcia o_1 i o_3 zaś F jest punktem przecięcia o_1 i o_2.

Rozważmy obrót o $120°$ wokół środka trójkąta ABC. Przenosi on punkt A na B, B na C i C na A, zatem przenosi okrąg o_1 na o_2, o_2 na o_3 i o_3 na o_1. Wynika stąd, że wspomniany obrót przenosi D na E, E na F i F na D. Zatem przenosi on odcinek DE na odcinek EF, odcinek EF na odcinek FD i odcinek FD na odcinek DE. Obrót zachowuje długości odcinków, więc $|DE| = |EF| = |FD|$ i trójkąt DEF jest równoboczny.

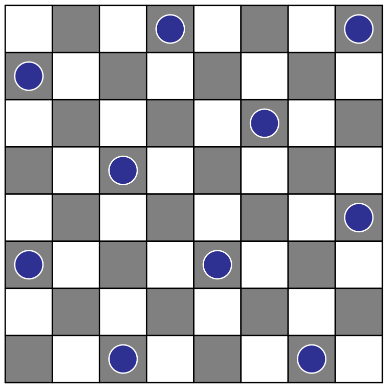
3. Na niektórych czarnych polach szachownicy 8×8 ustawiono pionki w ten sposób, że każde białe pole sąsiaduje bokiem z co najmniej jednym zajętym polem. Ile minimalnie pionków trzeba ustawić, by osiągnąć ten efekt? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Pokażemy, że nie można osiągnąć tego efektu przy użyciu co najwyżej 9 pionów. Załóżmy, że się uda i wybierzmy takie ustawienie. Popatrzmy na rysunek obok. Zaznaczono na nim 10 białych pól, z których żadne dwa nie stykają się bokiem z tym samym czarnym polem. Każde z tych pól sąsiaduje bokiem z co najmniej jednym polem z pionem, więc łącznie ustawiono co najmniej 10 pionów; sprzeczność.



Pozostaje pokazać, że można osiągnąć ten efekt przy użyciu 10 pionów. Ustawmy piony tak jak pokazano na rysunku na prawej strony. Żadne dwa z nich nie sąsiadują z tym samym białym polem. Jeden z nich stoi w rogu i sąsiaduje z dwoma polami. Sześć innych sąsiaduje z trzema polami. Trzy pozostałe sąsiadują z czterema polami. Białych pól, które sąsiadują z pionem jest $2 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 32$, czyli każde białe pole sąsiaduje z zajętym polem.



Odpowiedź: minimalnie trzeba ustawić 10 pionów.

4. Czy suma kwadratów siedmiu kolejnych liczb całkowitych może być kwadratem liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Załóżmy, że tak, weźmy liczby spełniające warunki zadania i oznaczmy środkową z nich przez n. Wtedy suma kwadratów liczb wynosi

$$(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2 = 7n^2+2\cdot(1+4+9) = 7(n^2+4).$$

Jeśli $7(n^2+4) = m^2$, to 7 dzieli m, więc 7^2 dzieli m^2, więc 7 dzieli liczbę n^2+4. Podzielmy n przez 7 z resztą: $n = 7q + r$ gdzie $0 \leqslant r \leqslant 6$. Wtedy $n^2 + 4 = 49q^2 + 14qr + r^2 + 4$ daje taką samą resztę z dzielenia przez 7 jak $r^2 + 4$. Dla $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ liczba $r^2 + 4$ wynosi $4, 5, 8, 13, 20, 29, 40$ odpowiednio i widzimy, że żadna z tych liczb nie jest podzielna przez 7. Zatem nie istnieje liczba naturalna n taka, że $n^2 + 4$ jest podzielna przez 7, sprzeczność. Ostatecznie przekonaliśmy się, że nie istnieją liczby całkowite spełniające warunki zadania.

Uwaga: korzystając z małego twierdzenia Fermata, możemy uniknąć sprawdzania siedmiu przypadków dla r. Mianowicie, jeśli $r^2 + 4 \equiv 0 \pmod 7$ to $r^2 \equiv -4 \equiv 3 \pmod 7$. Wtedy $r^6 = (r^2)^3 \equiv 3^3 \equiv 6 \pmod 7$. Ale z małego twierdzenia Fermata wynika, że $r^6 \equiv 1 \pmod 7$ dla wszystkich r niepodzielnych przez 7. Sprzeczność.

[*pg, jj*]