XIV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy drugie

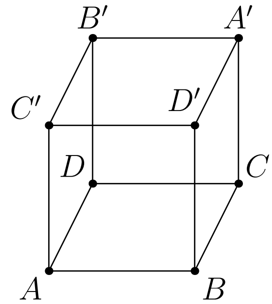
28 maja 2022 r.

1. Spośród ośmiu wierzchołków sześcianu wybrano cztery i połączono je krawędziami. Ile różnych (nieprzystających) czworościanów można w ten sposób uzyskać? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Dla wierzchołka S sześcianu, przez S' oznaczamy wierzchołek przeciwległy. Załóżmy najpierw, że wybrano pewne dwa końce AB na tej samej krawędzi. Jedyne wierzchołki sześcianu, które nie łączą się z A ani B pewną krawędzią, to wierzchołki A' i B'. Ale $ABA'B'$ jest kwadratem a nie czworościanem.

Wynika stąd, że wybrano też pewien wierzchołek leżący na krawędzi z A lub z B, niech będzie to C. Załóżmy (ewentualnie zmieniając oznaczenia), że BC jest również krawędzią sześcianu. Niech D będzie czwartym wierzchołkiem kwadratu $ABCD$. Ostatni wierzchołek czworościanu $ABCX$ możemy wybrać na cztery sposoby: $X = A'$, $X = B'$, $X = C'$, $X = D'$.



1. $X = A'$. W tym przypadku krawędzie czworościanu mają długości $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 1, 1, 1.

2. $X = B'$. W tym przypadku krawędzie czworościanu mają długości $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 1, 1.

3. $X = C'$. Ten przypadek jest symetryczny do przypadku $X = A'$, np. poprzez symetrię względem płaszczyzny $BDB'D'$.

4. $X = D'$. W tym przypadku krawędzie czworościanu mają długości $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 1, 1, 1.

Łącznie otrzymujemy trzy różne, nieprzystające, czworościany.

Załóżmy teraz, że nie wybrano obu końców żadnej krawędzi. Niech A będzie dowolnym wybranym wierzchołkiem. Nie wybrano więc żadnego z trzech wierzchołków połączonych krawędzią z A. Niech A' będzie przeciwległym do niego wierzchołkiem. Wtedy każdy z sześciu pozostałych wierzchołków jest drugim końcem krawędzi zaczynającej się w A lub A'. Wynika stąd, że nie wybrano A'. Pozostają tylko trzy wierzchołki do wyboru, a więc wybrano je wszystkie. Otrzymujemy w ten sposób czworościan foremny (którego krawędzie mają długości $\sqrt{2}$).

Odpowiedź: wybierając jak w zadaniu, można otrzymać cztery nieprzystające czworościany.

2. W pola $\square$ poniżej wstawiamy jeden ze znaków $<$ lub $>$

$$a+b \square c, \quad b+c \square a, \quad c+a \square b.$$

Na ile sposobów można to uczynić tak, by otrzymany układ nierówności miał rozwiązanie w liczbach dodatnich a, b, c? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Jeśli w którejś nierówności wstawimy znak „$<$” to jest dokładnie jeden sposób dostawienia znaków w pozostałych nierównościach tak, by istniało rozwiązanie w liczbach dodatnich. Na przykład, jeśli $a+b<c$ i jeśli istnieje rozwiązanie, to $a, b<c$ zatem $b+c>a$ oraz $c+a>b$.

Pozostaje przypadek trzech znaków „$>$”. W tym przypadku układ również ma rozwiązanie, na przykład $a=b=c=1$.

Odpowiedź: znaki można wstawić na cztery sposoby.

3. Niech d będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykaż, że w ciągu arytmetycznym

$$d+1,\ 2d+1,\ 3d+1,\ \ldots,\ nd+1,\ \ldots$$

jest nieskończenie wiele liczb złożonych.

Rozwiązanie.

Weźmy dwa wyrazy naszego ciągu; oznaczmy je jako $kd+1$ oraz $ld+1$. Wtedy mamy

$$(kd+1)(ld+1)=(kld+k+l)\,d+1,$$

więc iloczyn tych wyrazów też leży w naszym ciągu. To pokazuje w szczególności, że liczby złożone $(d+1)^2$, $(d+1)^3$, $(d+1)^4$ $\ldots$ są wyrazami ciągu. Liczby te są parami różne, bowiem $d+1 \geqslant 2$.

4. Liczby całkowite dodatnie p, q, r, a, b, c są takie, że każde z równań kwadratowych

$$px^2+qx+a=0, \quad qx^2+rx+b=0, \quad rx^2+8px+c=0$$

ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty i każdy z tych pierwiastków jest całkowity. Pokaż, że wszystkie te trzy pierwiastki są równe.

Rozwiązanie.

Zachodzi

$$px^2+qx+a=p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2+\left(a-\frac{q^2}{4p}\right).$$

Jeśli równanie $px^2+qx+a=0$ ma dokładnie jeden pierwiastek, to $a-q^2/4p=0$ oraz ten pierwiastek to $x_1=-q/2p$. Analizując podobnie drugie i trzecie równania znajdujemy ich jedyne pierwiastki $x_2=-r/2q$ oraz $x_3=-8p/2r$.

Z założenia, wszystkie trzy liczby x_1, x_2, x_3 są całkowite. Wynika stąd, że $2p$ dzieli q, że $2q$ dzieli r i że $2r$ dzieli $8p$. Wszystkie te liczby są dodatnie, zatem zachodzi $2p \leqslant q$, $2q \leqslant r$ oraz $2r \leqslant 8p$. Łącząc te nierówności, otrzymujemy

$$8p \leqslant 4q \leqslant 2r \leqslant 8p,$$

a zatem $8p=4q=2r$. Wyliczamy stąd, że $x_1=x_2=x_3=-1$.

[*cb, pg, jj*]