

XVI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy drugie

9 marca 2024 r.

1. Liczby dodatnie a , b i c są długościami boków pewnego trójkąta. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$ istnieje trójkąt o bokach długości $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ i $\sqrt[n]{c}$.

Rozwiązanie.

Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $a \leq b \leq c$. Wówczas $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \leq \sqrt[n]{c}$. W tej sytuacji oczywiście $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}$ oraz $\sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{c}$.

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona otrzymujemy

$$\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n = a + b + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot (\sqrt[n]{a})^k \cdot (\sqrt[n]{b})^{n-k} > a + b > c = (\sqrt[n]{c})^n.$$

Stąd wynika, że $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} > \sqrt[n]{c}$. Otrzymane nierówności dowodzą, że istnieje trójkąt o bokach długości $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ i $\sqrt[n]{c}$.

2. Dany jest trójkąt ABC . Punkt D leży na jego boku BC , punkt E leży na jego boku AC , zaś punkt F leży na jego boku AB . Ponadto na każdym z czworokątów $ABDE$, $BCEF$, $ACDF$ można opisać okrąg. Pokaż, że odcinki AD , BE , CF są wysokościami trójkąta ABC .

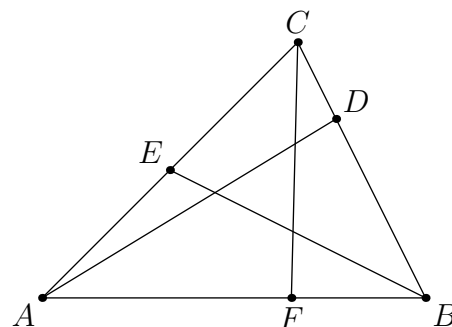
Rozwiązanie.

Rozwiązanie opiera się na analizie trzech par kątów: $\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle BEA$, $\sphericalangle BEC$, $\sphericalangle BEA$, $\sphericalangle CFA$, $\sphericalangle CFB$, patrz poglądowy rysunek obok. Z założeń zadania, niektóre z tych kątów są równe jako kąty wpisane w okrąg:

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle AFC$$

$$\sphericalangle BEA = \sphericalangle BDA$$

$$\sphericalangle CFB = \sphericalangle CEB.$$



Korzystając z tego, obliczamy

$$\sphericalangle CDA = \sphericalangle CFA = 180^\circ - \sphericalangle CFB = 180^\circ - \sphericalangle CEB = \sphericalangle AEB = \sphericalangle ADB.$$

Ponadto $\sphericalangle CDA$, $\sphericalangle ADB$ sumują się do 180° , więc $\sphericalangle CDA = \sphericalangle ADB = 90^\circ$ i AD jest wysokością trójkąta ABC . Podobnie dowodzimy, że BE , CF są wysokościami.

3. Dla dowolnych danych liczb całkowitych $n, m \geq 2$, wyznacz wszystkie rozwiązania całkowite x równania

$$2^n - 1 = x^m.$$

Rozwiązanie.

Udowodnimy, że jeśli $n, m \geq 2$, to nie istnieje liczba całkowita x taka, że $2^n - 1 = x^m$. Załóżmy przeciwnie, że takie x istnieje. Ponieważ lewa strona równania jest liczbą nieparzystą więc x jest też liczbą nieparzystą, czyli $x = 2y + 1$ dla pewnej liczby całkowitej y . Jeśli m jest liczbą parzystą ($m = 2k$), to

$$x^m = (2y + 1)^{2k} = (4y^2 + 4y + 1)^k = 4s + 1,$$

dla pewnej liczby całkowitej s . Nasze równanie przyjmuje postać $2^n - 1 = 4s + 1$, czyli $2^n = 4s + 2$. Ostatnia równość nie może zajść bo prawa strona nie jest podzielna przez 4. Zatem m jest liczbą nieparzystą. Wtedy $x > 1$ oraz

$$\begin{aligned} 2^n &= x^m + 1 = (x + 1)(x^{m-1} - x^{m-2} + \dots + x^2 - x + 1) \\ &= (x + 1)(x^{m-2}(x - 1) + x^{m-3}(x - 1) + \dots + x(x - 1) + 1) \\ &= 2(y + 1)(2yx^{m-2} + 2yx^{m-3} + \dots + 2yx + 1) \end{aligned}$$

Czynnik $2yx^{m-2} + 2yx^{m-3} + \dots + 2yx + 1$ jest większy od 1 i jest liczbą nieparzystą. Nie jest zatem dzielnikiem 2^n . To daje sprzeczność, która kończy dowód.

4. Na płaszczyźnie dany jest ciąg kwadratów $K_0, K_1, \dots, K_{2024}$ zbudowany w następujący sposób:

- wszystkie kwadraty mają wspólny wierzchołek A ,
- jednym z boków kwadratu K_{i+1} jest przekątna kwadratu K_i przechodząca przez wierzchołek A . Zachodzi to dla każdego $i = 0, \dots, 2023$.
- kwadrat K_{i+2} nie zawiera kwadratu K_i . Zachodzi to dla każdego $i = 0, \dots, 2022$.

Kwadrat K_0 ma bok długości 1. Oblicz pole figury, która jest sumą wszystkich tych kwadratów.

Rozwiązanie.

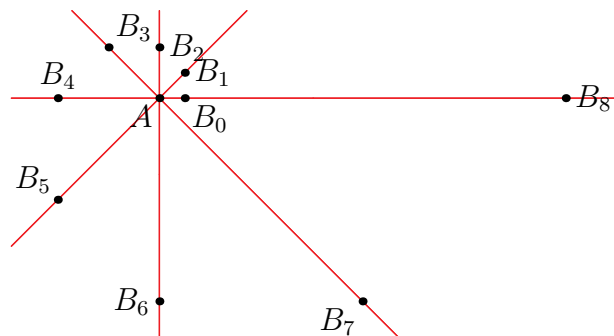
Oznaczmy przez B_i wierzchołek kwadratu K_i przeciwny do A . Z założenia, AB_i jest bokiem w kwadracie K_{i+1} , a AB_{i+1} przekątną w nim, zatem $\angle B_i A B_{i+1} = 45^\circ$ dla każdego $i \leq 2023$. W szczególności zachodzi $\angle B_{i+1} A B_{i+2} = 45^\circ$ dla $i \leq 2022$. Wobec tego są dwie możliwości:

$$\angle B_i A B_{i+2} = 90^\circ, \quad \text{oraz} \quad \angle B_i A B_{i+2} = 0^\circ.$$

W drugim przypadku punkty A, B_i, B_{i+2} są współliniowe. Ale to znaczy, że przekątna K_i jest zawarta w przekątnej K_{i+2} , więc K_i jest zawarty w K_{i+2} wbrew założeniu. Wobec tego

$$\angle B_i A B_{i+2} = 90^\circ$$

dla każdego $0 \leq i \leq 2022$.



Rysunek pokazuje przykładowe położenia pierwszej ósemki punktów. Zauważmy, że punkty A, B_i, B_{i+8} są współliniowe dla każdego $0 \leq i \leq 2024-8$. Zatem półproste AB_i , dla $i = 0, 1, \dots, 2024$ dzielą płaszczyznę na osiem części, które nazwiemy *oktantami*. Część pomiędzy półprostymi AB_i i AB_{i+1} będziemy nazywać *oktantem* B_iAB_{i+1} .

Kwadrat K_i ma przekątną AB_i , można go więc rozbić na dwa trójkąty prostokątne $K_{i,1}, K_{i,2}$, z których pierwszy leży w oktancie $B_{i-1}AB_i$, a drugi w oktancie B_iAB_{i+1} . Trójkąt $K_{i,2}$ jest w całości zakrywany przez kwadrat K_{i+1} (o ile $i+1 < 2024$). Trójkąt $K_{i,1}$ jest ma tylko wspólny odcinek z K_{i+1} i jest rozłączny z kwadratami $K_{i+2}, K_{i+3}, \dots, K_{i+6}$, bo te położone są w innych oktantach płaszczyzny. Trójkąt $K_{i,1}$ jest zakrywany w całości przez kwadrat K_{i+7} .

Liczba 2024 jest podzielna przez 8, więc ostatni z kwadratów, kwadrat K_{2024} , ma przekątną zawartą w półprostej AB_0 . To pokazuje, że otrzymana figura składa się z ośmiu trójkątów:

$$K_{2024,2}, K_{2024,1}, K_{2023,1}, K_{2022,1}, \dots, K_{2018,1},$$

które leżą odpowiednio w oktantach $B_0AB_1, B_7AB_0, B_6AB_7, B_5AB_6, B_4AB_5, B_3AB_4, B_2AB_3, B_1AB_2$. Niech p_i oznacza pole kwadratu K_i . Z powyższego rozkładu otrzymujemy, że pole figury to

$$\frac{1}{2} (2p_{2024} + p_{2023} + p_{2022} + \dots + p_{2018}).$$

Bok kwadratu K_{i+1} to przekątna K_i , więc $p_{i+1} = 2p_i$. Skoro $p_0 = 1$, to $p_i = 2^i$ dla każdego i . Po wstawieniu tego do wzoru powyżej otrzymujemy wynik

$$\frac{1}{2} (2 \cdot 2^{2024} + 2^{2023} + \dots + 2^{2018}) = 2^{2017} \cdot (2 \cdot 2^6 + 2^5 \dots + 1) = 2^{2017} \cdot 191.$$

[pg, jj]