VIII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy pierwsze

14 maja 2016 r.

1. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n \leqslant 2016$ takie, że liczba n^2 ma identyczne i różne od zera dwie ostatnie cyfry w zapisie dziesiętnym.

Rozwiązanie

Przede wszystkim znajdziemy wszystkie możliwe dwie ostatnie cyfry. Jeżeli liczba n^2 kończy się cyframi $\overline{aa}$, to jej reszta z dzielenia przez 10 jest równa a.

Jakie reszty może dawać n^2 przy dzieleniu przez 10? Reszta ta zależy jedynie od reszty n przy dzieleniu przez 10. Sprawdzając przypadki $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ stwierdzamy, że n^2 może dać resztę 0, 1, 4, 9 lub 5. *Na marginesie warto dodać, że wystarczy sprawdzać* $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$*, gdyż* $10 - n$ *daje tę samą resztę co* n*.*

Wracamy do rozwiązania zadania. Mamy $a \in \{0, 1, 4, 5, 9\}$. Wartość $a = 0$ jest wykluczona w treści zadania. Zatem $a \in \{1, 4, 5, 9\}$.

Skoro 100 dzieli się przez 4, to reszta z dzielenia liczby n^2 przez 4 jest taka sama jak reszta liczby $10a + a = 11a$. Sprawdzamy jak poprzednio, że n^2 może dawać resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 4. Liczba $11a$ daje resztę $3, 0, 3, 3$ dla $a = 1, 4, 5, 9$ odpowiednio. Stąd wniosek, że $a = 4$, czyli n^2 kończy się mickiewiczowskimi cyframi 44.

Skoro n^2 ma ostatnią cyfrę 4 to ostatnia cyfra n to 2 lub 8. Rozważmy dwa przypadki:

1. $n = 100a + 10b + 2$ dla $0 \leqslant b \leqslant 9$. Wtedy reszta z dzielenia przez 100 liczby n^2 jest taka sama, jak reszta liczby $40b + 4$, czyli $b = 1$ i $n = 100a + 12$ lub też $b = 6$ i $n = 100a + 62$.

   Aby $n \leqslant 2016$ w pierwszym przypadku musi zachodzi $0 \leqslant a \leqslant 20$, co daje 21 rozwiązań, zaś w drugim zachodzi $0 \leqslant a \leqslant 19$, co daje dalsze 20 rozwiązań.

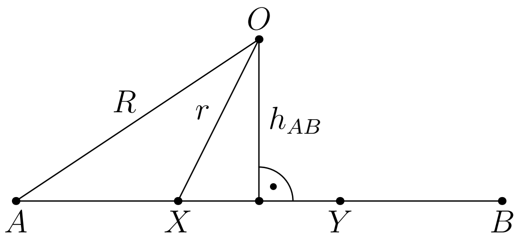
2. $n = 100a+10b+8$ dla $0 \leqslant b \leqslant 9$. Jak poprzednio, obliczamy, że reszta n^2 z dzielenia przez 100 jest taka sama, jak reszta liczby $160b + 64$ czy $60b + 64$. By reszta ta wyniosła 44 musi zachodzić $b = 3$ lub $b = 8$. Wtedy $n = 100a+88$ lub $n = 100a+38$. Daje to łącznie 40 możliwych rozwiązań.

Odpowiedź: Są to liczby postaci $100a + 12$ *dla całkowitego nieujemnego* $a \leqslant 20$ *oraz liczby postaci* $100a + 38$*,* $100a + 62$*,* $100a + 88$ *dla całkowitego nieujemnego* $a \leqslant 19$*. Łącznie takich liczb jest* 81*.*

2. Na każdym z boków trójkąta ABC zaznaczono po dwa punkty dzielące ten bok na trzy równe części. Pokaż, że jeśli istnieje okrąg przechodzący przez sześć zaznaczonych punktów, to trójkąt ABC jest równoboczny.

Rozwiązanie, sposób I

Załóżmy, że okrąg z zadania istnieje i oznaczmy jego środek przez O. Oznaczmy przez X, Y zaznaczone punkty leżące na boku AB; wtedy $AX = XY = YB = \frac{1}{3}AB$. Mamy $OX = OY$, więc O leży na symetralnej odcinka XY. Symetralna ta pokrywa się z symetralną odcinka AB, więc O leży na symetralnej odcinka AB, czyli $OA = OB$. Powtarzając rozumowanie dla boku BC, stwierdzamy, że $OB = OC$, czyli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.



Oznaczmy przez R długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC, zaś przez r długość promienia okręgu przechodzącego przez sześć punktów. Wreszcie oznaczmy przez h_{AB} odległość punktu O od boku AB.

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$R^2 = h_{AB}^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2, \quad \text{oraz} \quad r^2 = h_{AB}^2 + \left(\frac{1}{6}AB\right)^2.$$

Obliczamy stąd, że

$$R^2 - r^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right) \cdot AB^2,$$

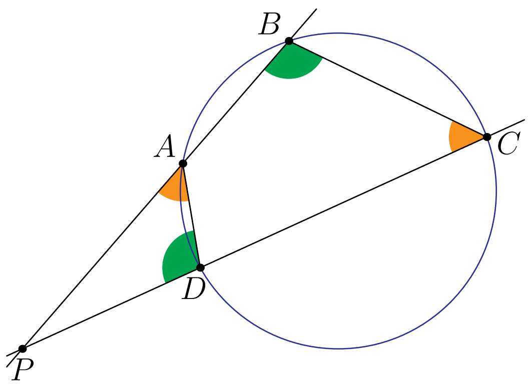
więc $AB = \sqrt{\frac{36}{8}(R^2 - r^2)}$. Analogicznie wyliczamy, że BC i CA także mają tę długość, zatem trójkąt ABC jest równoboczny.

Rozwiązanie, sposób II, na podstawie rozwiązania Damiana Werpachowskiego

Bardzo przydatne w tym zadaniu (i nie tylko) może być *twierdzenie o siecznych*:

Twierdzenie 1. *Niech A, B, C, D będą czterema punktami na okręgu, a P będzie punktem przecięcia prostych AB i CD. Wtedy $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.*

Szkic dowodu.



Załóżmy, że P leży poza okręgiem (drugi przypadek jest analogiczny). Ustalmy oznaczenia tak, że A leży na odcinku BP i D leży na odcinku CP. Wtedy $ABCD$ jest czworokątem wypukłym wpisanym w okrąg. Zachodzi $\sphericalangle PAD = 180° - \sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = \sphericalangle BCP$ oraz $\sphericalangle PDA = 180° - \sphericalangle CDA = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CBP$. Wobec tego trójkąty PAD i BCP są podobne i zachodzi

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB},$$

stąd teza. □

Oznaczmy przez X_1, X_2 zaznaczone punkty leżące na boku AB, zaś przez Y_1, Y_2 zaznaczone punkty leżące na boku AC. Oznaczmy przez o okrąg przechodzący przez 6 punktów z zadania.

Prosta AB przecina okrąg o w punktach X_1, X_2 zaś prosta AC przecina go w punktach Y_1, Y_2. Z twierdzenia o siecznych wynika, że

$$AX_1 \cdot AX_2 = AY_1 \cdot AY_2.$$

Ale $AX_1 \cdot AX_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}AB^2$, zaś $AY_1 \cdot AY_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}AC^2$. Otrzymujemy równość $AB^2 = AC^2$, a więc i $AB = AC$. Analogicznie rozumując dla boków AC i BC oraz punktu C stwierdzamy, że $AC = BC$. Łącznie $AB = AC = BC$, co dowodzi równoboczności.

3. Wykaż, że dla niekończenie wielu nieparzystych liczb naturalnych m liczba $m^2 + 2^m$ nie jest pierwsza.

Rozwiązanie, sposób I

Jeżeli m jest nieparzyste, to $2^m + 1 = (2+1)(\ldots)$ jest podzielna przez 3, więc 2^m daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Jeżeli m daje resztę 1 z dzielenia przez 3, to $m = 3k + 1$ dla całkowitego k. Wtedy $m^2 = (3k + 1)^2 = 3(k^2 + 2k) + 1$ również daje resztę 1 z dzielenia przez 3.

Jeżeli $m = 6k+1$ to oba poprzednie warunki zachodzą, więc m^2+2^m daje resztę $1+2$, czyli 0, z dzielenia przez 3. Oczywiście dla $m > 1$ mamy $m^2 + 2^m > 1+2 = 3$, więc liczba $m^2 + 2^m$ nie jest pierwsza.

Rozwiązanie, sposób II

Powyższe rozwiązanie znacznie wygodniej zapisać za pomocą kongruencji. Piszemy $a \equiv b \pmod 3$ na oznaczenie faktu, że liczby a i b dają równe reszty z dzielenia przez 3. Dla $m = 6k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, mamy

$$2^m = 2^{6k} \cdot 2 = 4^{3k} \cdot 2 \equiv 1^{3k} \cdot 2 = 2 \pmod 3.$$

$$m^2 = (6k + 1)^2 \equiv 1^2 = 1 \pmod 3$$

zatem $2^m + m^2 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Skoro dla $k > 0$ mamy $2^m + m^2 > 3$ i podzielne przez 3, to liczba ta nie jest pierwsza.

4. Na jednym z pól nieskończonej szachownicy stoi pionek. Ania i Piotrek grają w grę. W każdym ruchu Ania przesuwa pionek ruchem wielkiego skoczka (patrz poniżej), zaś Piotrek *pięciokrotnie* ruchem króla szachowego. Ruchy wykonują oni naprzemiennie, zaczyna Piotrek. Ania wygrywa, jeżeli pionek ponownie stanie na polu, na którym już wcześniej stawał. Uzasadnij, że zawsze może ona ograć Piotrka w skończenie wielu ruchach.

Uwaga: ruch wielkiego skoczka przesuwa pionek o jeden rząd i 2016 *kolumn lub o jedną kolumnę i* 2016 *rzędów. Ruch króla szachowego przesuwa pionek na dowolne pole sąsiadujące bokiem lub rogiem z danym polem.*

Rozwiązanie.

Strategią Ani będzie, nieformalnie mówiąc, maksymalne przybliżanie się do pola startowego tak, by cała gra rozgrywała się tylko na skończenie wielu polach. Formalne sformułowanie tej intuicji wymaga nieco oznaczeń.

Wprowadźmy układ współrzędnych i ustalmy, że startowe pole ma współrzędne $(0, 0)$. Dla pola $p = (x, y)$ oznaczmy $|p| := |x| + |y|$ i nazwijmy to umownie *odległością* p od pola startowego. Przy ruchu Piotrka ta odległość rośnie o co najwyżej 10, zaś przy ruchu Ani rośnie ona o co najwyżej 2017.

Strategia Ani jest następująca:

1. jeżeli pionek stoi na polu $p = (x, y)$ takim, że $x \geqslant 2016$ to wykonuje ona ruch na pole $q = (x - 2016, y + 1)$. Odległość zmniejsza się o co najmniej 2015.

2. jeżeli pionek stoi na polu $p = (x, y)$ takim, że $x \leqslant -2016$ to wykonuje ona ruch na pole $q = (x + 2016, y + 1)$. Odległość zmniejsza się o co najmniej 2015.

3. jeżeli pionek stoi na polu $p = (x, y)$ takim, że $y \geqslant 2016$, to wykonuje ona ruch na pole $q = (x + 1, y - 2016)$. Odległość zmniejsza się o co najmniej 2015.

4. jeżeli pionek stoi na polu $p = (x, y)$ takim, że $y \leqslant -2016$, to wykonuje ona ruch na pole $q = (x + 1, y + 2016)$. Odległość zmniejsza się o co najmniej 2015.

5. jeżeli żaden z poprzednich warunków nie zaszedł, Ania wykonuje dowolny ruch.

W ostatnim przypadku $|x| \leqslant 2015$ i $|y| \leqslant 2015$, więc odległość p od pola startowego wynosi co najwyżej $2 \cdot 2015$. Wobec tego odległość q od pola startowego wynosi co najwyżej $3 \cdot 2015 + 1$.

Dla każdego n oznaczmy przez $\mathcal{B}(n)$ zbiór pól $p = (x, y)$ takich, że $|x| + |y| \leqslant n$. Rozważmy zbiór $\mathcal{B}(4 \cdot 2015 + 1)$. Zauważmy, że zaczynając od każdego pola tego zbioru Ania przechodzi do pola ze zbioru $\mathcal{B}(3 \cdot 2015 + 1)$.

Z drugiej strony każdy ruch Piotrka z $\mathcal{B}(3 \cdot 2015 + 1)$ przechodzi do $\mathcal{B}(3 \cdot 2015 + 11)$ zawartego w zbiorze $\mathcal{B}(4 \cdot 2015 + 1)$. Zatem Ania stosując swą strategię sprawia, że pionek nigdy nie wychodzi ze *skończonego* zbioru pól $\mathcal{B}(4 \cdot 2015 + 1)$. Skoro tak, to w pewnym momencie musi on stanąć drugi raz na już odwiedzonym polu. Nastąpi to po mniej niż $|\mathcal{B}(4 \cdot 2015 + 1)| < (8 \cdot 2015 + 3)^2 + 1$ ruchach.

[*pg, jj*]