V Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy pierwsze

27 kwietnia 2013 r.

1. Dane są cztery liczby dodatnie a, b, c, d. Wykazać, że przynajmniej jedna z liczb

$$\frac{a+b+c}{d}, \quad \frac{b+c+d}{a}, \quad \frac{a+c+d}{b}, \quad \frac{a+b+d}{c}$$

jest nie większa od 3 i przynajmniej jedna jest nie mniejsza od 3.
Rozwiązanie.

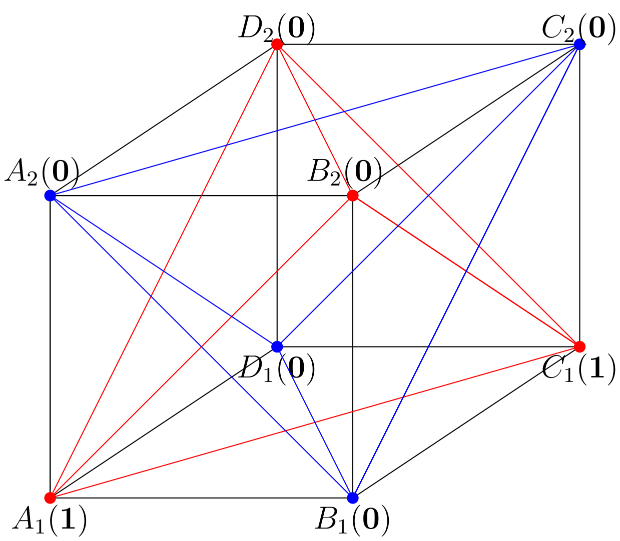
Załóżmy, że każdy z ułamków rozpatrywanych w zadaniu jest mniejszy od 3. Zachodzą wtedy nierówności

$$a+b+c < 3d, \quad b+c+d < 3a, \quad a+c+d < 3b, \quad a+b+d < 3c.$$

Dodając je stronami otrzymujemy $3a + 3b + 3c + 3d < 3a + 3b + 3c + 3d$, a więc uzyskujemy sprzeczność. Analogicznie wykazujemy, że rozpatrywane ułamki nie mogą być jednocześnie większe od 3.

2. Każdemu wierzchołkowi sześcianu $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ przypisano liczbę zero lub jeden. Jedynki przypisano dwóm przeciwległym wierzchołkom podstawy A_1 i C_1, zaś wszystkim pozostałym przypisano zera. Przez „ruch“ rozumiemy dodanie jedynki do liczb przypisanych końcom wybranej krawędzi sześcianu. Czy po wykonaniu pewnej ilości „ruchów“ można uzyskać równe liczby w każdym wierzchołku sześcianu?
Rozwiązanie.

Pokolorujmy wierzchołki sześcianu na czerwono i niebiesko tak jak na rysunku. Zauważmy, że każda krawędź ma końce różnych kolorów.



Suma liczb przypisanych wierzchołkom czerwonym wynosi 2, zaś suma liczb przypisanych wierzchołkom niebieskim wynosi 0. Każdy „ruch“ powoduje dodanie jedynki do jednego wierzchołka niebieskiego i dodanie jedynki do jednego wierzchołka czerwonego. Zatem dla dowolnej liczby naturalnej k, po wykonaniu k-„ruchów“ suma liczb przypisanych wierzchołkom niebieskim jest równa k, zaś suma suma liczb przypisanych wierzchołkom czerwonym jest równa $k+2$. Tak więc nie jest możliwe otrzymanie równych liczb przy każdym wierzchołku.

3. Uzasadnić, że nie istnieje taka liczba pierwsza p i liczba x, że liczby

$$x, \quad x+p, \quad x+2p-1$$

są kwadratami liczb całkowitych dodatnich.

Rozwiązanie.

Załóżmy, że istnieją liczby całkowite dodatnie a, b, c oraz liczba pierwsza p takie, że

$$x = a^2, \quad x+p = b^2, \quad x+2p-1 = c^2.$$

Odejmując stronami dwie pierwsze równości otrzymujemy $p = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$. Ponieważ p jest liczbą pierwszą oraz $0 < b-a < a+b$, więc $b-a = 1$ i $p = a+b$. Uwzględniając to w ostatniej zależności otrzymujemy

$$c^2 = x+2p-1 = a^2+2(a+b)-1 = a^2+2(2a+1)-1 = a^2+4a+1 = (a+2)^2-3,$$

stąd $c < a+2$. Z drugiej strony mamy $p > 1$, więc $c^2 = x+2p-1 > x+p = (a+1)^2$, czyli $a+1 < c < a+2$. Liczba całkowita c leży pomiędzy kolejnymi liczbami całkowitymi $a+1, a+2$, sprzeczność.

Alternatywne zakończenie rozwiązania: po zauważeniu, że $c^2 = (a+2)^2 - 3$ *przepisujemy to równanie jako*

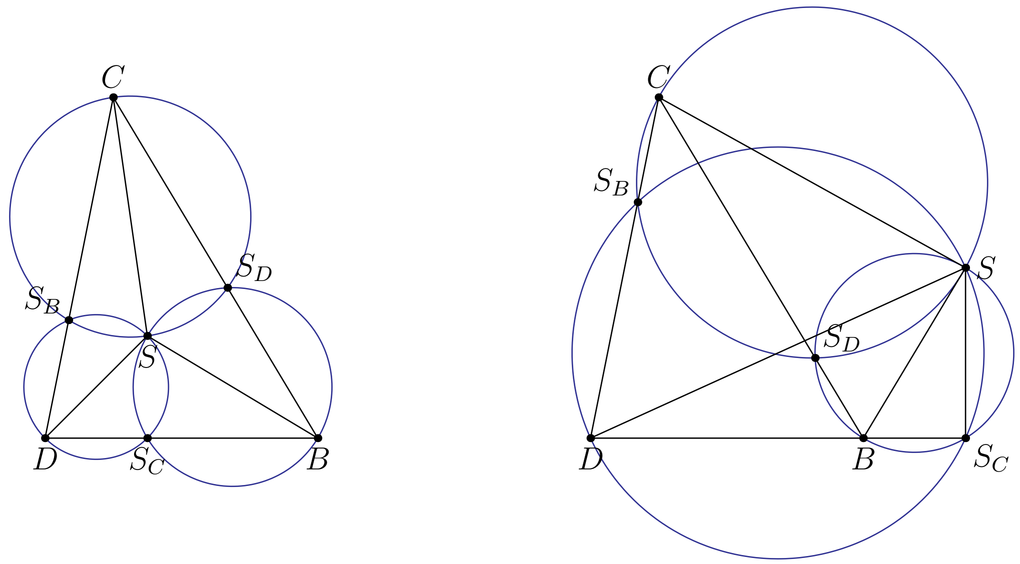
$$3 = (a+2)^2 - c^2 = (a+2-c)(a+2+c),$$

stąd $a-c+2 = 1$ *i* $a+c+2 = 3$. *Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie* $a = 0, c = 1$, *stąd* $p = b^2$, *sprzeczność.*

4. Krawędzie AB, AC i AD czworościanu $ABCD$ są średnicami trzech kul. Wykazać, że ściana BCD jest zawarta w sumie tych kul (tzn. każdy punkt tej ściany należy do wnętrza lub brzegu pewnej z tych kul).

Rozwiązanie.

Rozważmy rzut czworościanu oraz kul na płaszczyznę BCD. Niech S oznacza rzut wierzchołka A. Rzuty kul są kołami, których średnicami są odcinki BS, CS oraz DS. Wystarczy zatem wykazać, że koła te pokrywają trójkąt BCD. Oznaczmy sumę kół przez $\mathcal{F}$. Zauważmy, że mogą być różne położenia punktu S względem trójkąta BCD:



Niech S_B, S_C, S_D będą rzutami punktu S na boki CD, DB, BC odpowiednio. Skoro $\sphericalangle SS_BC = 90°$, to punkt S_B leży na okręgu o średnicy SC, więc trójkąt SS_BC zawiera się w $\mathcal{F}$ (uwaga: może się zdarzyć np. $S_B = C$, wtedy SS_BC jest odcinkiem, ale nie zmienia to naszego rozumowania). Analogicznie trójkąt SS_BD zawiera się w $\mathcal{F}$. Trójkąt CSD, niezależnie od położenia punktu S jest pokrywany przez trójkąty SS_BC, SS_BD, więc $\triangle CSD$ zawiera się w $\mathcal{F}$. Analogicznie trójkąty DSB, BSC zawierają się w $\mathcal{F}$.

Pozostaje sprawdzić, że, niezależnie od położenia punktu S, trójkąty DSB, BSC, CSD pokrywają $\triangle BCD$.

Rozwiązanie II, oparte na pomyśle Daniela Fiedosiuka

Zanotujmy najpierw proste spostrzeżenie: jeżeli AB jest średnicą kuli, zaś punkt C jest taki, że $\sphericalangle ACB = 90°$, to C należy do brzegu ww. kuli.

Niech S oznacza rzut punktu A na płaszczyznę BCD, zaś S_B, S_C, S_D oznaczają rzuty punktu A na *proste* CD, DB, BC odpowiednio. Wtedy

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle AS_CB = \sphericalangle AS_DB = 90°,$$

wobec tego punkty S, S_C, S_D, B leżą na kuli o średnicy AB, więc cały czworokąt SS_CS_DB zawiera się w tej kuli (używamy tutaj faktu, że kula jest *wypukła*. Uwaga: suma trzech kul nie jest zwykle wypukła). Analogicznie czworokąt SS_DS_BC zawiera się w kuli o średnicy AC oraz czworokąt SS_BS_CD zawiera się w kuli o średnicy AD.

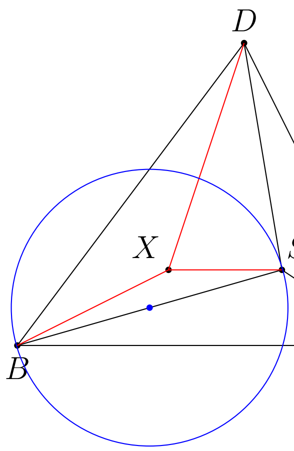
Teraz zauważmy, że, niezależnie od położenia punktu S trójkąt BSC zawiera się w sumie trójkątów BSS_D oraz CSS_D, więc zawiera się w sumie kul. Tak samo w sumie kul zawierają się trójkąty CSD oraz DSB, a więc i cały czworokąt $BCDS$ (ten ostatni wniosek warto przemyśleć dokładnie).

III rozwiązanie

Skorzystamy ze znanej własności kątów opartych na średnicy okręgu. Otóż kąty proste mają wierzchołki na okręgu, kąty rozwarte wewnątrz koła ograniczonego okręgiem, zaś ostre na zewnątrz koła.

Rozważmy rzut czworościanu oraz kul na płaszczyznę BCD. Niech S oznacza rzut wierzchołka A. Rzuty kul są kołami, których średnicami są odcinki BS, CS oraz DS.

Wystarczy zatem wykazać, że koła te pokrywają trójkąt BCD. Rozważymy osobno przypadek, gdy S należy do trójkąta BCD oraz gdy S leży poza tym trójkątem. Niech teraz X będzie dowolnym punktem trójkąta BCD i załóżmy, że S należy do trójkąta BCD. Punkt X należy wówczas do jednego z trójkątów BSC, CSD lub BSD. Załóżmy, że np. X należy do BSD.

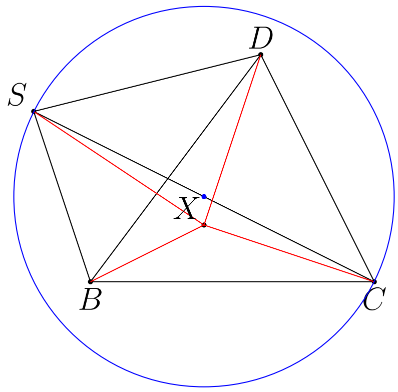


Wówczas

$$\sphericalangle BXS + \sphericalangle SXD + \sphericalangle DXB = 360^\circ,$$

i każdy z powyższych kątów ma miarę mniejszą od 180°. Zauważmy, że przynajmniej jeden z kątów $\sphericalangle BXS$ lub $\sphericalangle DXS$ jest rozwarty. W przeciwnym razie zachodzi nierówność $\sphericalangle BXS + \sphericalangle DXS \leqslant 180^\circ$, a więc $\sphericalangle BXD \geqslant 180^\circ$, co jest niemożliwe. Jeśli np. kąt $\sphericalangle BXS$ jest rozwarty, to oczywiście X należy do koła, którego średnicą jest BS.

Załóżmy, że S leży poza trójkątem BCD. Leży on oczywiście w jednym z obszarów wyznaczonych przez kąty wewnętrzne lub zewnętrzne trójkąta BCD. Przypuśćmy np., że S należy do obszaru ograniczonego ramionami kąta $\sphericalangle BCD$.

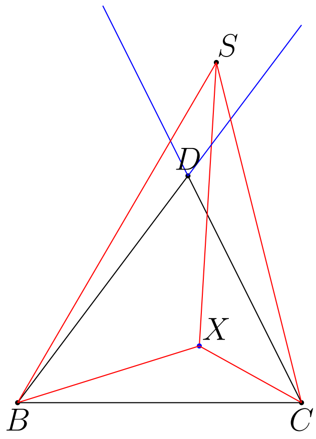


Załóżmy, że X leży po tej samej stronie prostej CS co wierzchołek B. Mamy wówczas

$$\sphericalangle SXB + \sphericalangle SXC + \sphericalangle BXC = 360^\circ,$$

a więc (podobnie jak wyżej) przynajmniej jeden z kątów $\sphericalangle SXB$ lub $\sphericalangle SXC$ jest rozwarty. Jeśli jest nim $\sphericalangle SXB$, to X leży w kole o średnicy SB. Jeśli zaś jest to kąt $\sphericalangle SXC$, to X leży w kole o średnicy SC. Analogicznie rozumujemy, gdy X po tej samej stronie prostej CS co wierzchołek C. Jeśli X leży na prostej XC, to oczywiście X należy do koła o średnicy CS.

Pozostaje rozważyć przypadek, gdy S leży w obszarze wyznaczonym przez zewnętrzny kąt wierzchołkowy między prostymi w których zawarte są dwa boki trójkąta BCD.



Przypuśćmy, że S leży w zewnętrznym kącie między prostymi BD i CD. Wówczas trójkąt BCD jest całkowicie zawarty w trójkącie BSC i podobnie jak wyżej przynajmniej jeden z kątów $\sphericalangle BXS$ lub $\sphericalangle CXS$ jest rozwarty. Jeśli np.$\sphericalangle CXS$ jest rozwarty, to X należy do koła o średnicy CS.

[*pg, jj*]