Podlaski Konkurs Matematyczny - 2005
Klasy drugie
Rozwiązania zadań konkursowych

14 maja 2005 r.

1. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym wzorem

$$a_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}\ , \qquad \text{dla} \quad n \geqslant 1.$$

Niech A będzie zbiorem wszystkich możliwych iloczynów różnych wyrazów tego ciągu. Czy zbiór A jest ograniczony z góry? Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie

Rozważmy dowolną liczbę $a \in A$. Niech $1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k = m$ będą takie, że

$$a = a_{n_1} \cdot a_{n_2} \cdot \ldots \cdot a_{n_k}.$$

Ponieważ $a_j > 1$ dla $j \geqslant 1$ oraz

$$a_j = \frac{j^2+2j+1}{j(j+2)} = \frac{(j+1)^2}{j(j+2)},$$

więc

$$\begin{aligned} a \leqslant a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m &= \frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{(m+1)^2}{m\cdot(m+2)} \\ &= \frac{2\cdot[(m+1)!]^2}{m!\cdot(m+2)!} = \frac{2(m+1)}{m+2} < 2. \end{aligned}$$

Zbiór A jest zatem ograniczony z góry liczbą 2. $\square$

2. Wykazać, że jeśli $p_1, p_2, \ldots, p_{56}$ są liczbami pierwszymi większymi od 7, to liczba

$$p_1^6 + p_2^6 + \cdots + p_{56}^6$$

jest podzielna przez 56.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnej liczby p:

$$p^6 - 1 = (p^3-1)(p^3+1) = (p-1)(p+1)(p^2+p+1)(p^2-p+1).$$

Jeśli p jest liczbą nieparzystą, to $p-1$ i $p+1$ są kolejnymi liczbami parzystymi, a więc ich iloczyn jest podzielny przez 8. W szczególności, $8 \mid p^6-1$ dla dowolnej liczby nieparzystej p. Zabadajmy teraz podzielność p^6-1 przez 7. Niech p będzie liczbą niepodzielną przez 7, tzn. $p = 7k+r$, gdzie $r \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Zauważmy, że kolejno dla $r = 1,2,3,4,5,6$ przez 7 podzielne są liczby: $p-1$, p^2+p+1, p^2-p+1, p^2+p+1, p^2-p+1, $p+1$. Tak więc, $7 \mid p^6-1$ dla dowolnej liczby p niepodzielnej przez 7. W konsekwencji $56 \mid p^6-1$ dla dowolnej nieparzystej i niepodzielnej przez 7 liczby p. Stąd wnosimy, że jeśli liczby $p_1, p_2, \ldots, p_{56}$ są pierwsze i większe od 7, to liczba

$$p_1^6 + p_2^6 + \cdots + p_{56}^6 = (p_1^6-1) + (p_2^6-1) + \cdots + (p_{56}^6-1) + 56$$

jest podzielna przez 56.

$\square$

3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego wierzchołki należą do pewnego okręgu i $|BC| = |CD|$. Niech $|AB| = x,\ |AD| = y,\ |AC| = z$. Udowodnić, że

$$z > \frac{x+y}{2}$$

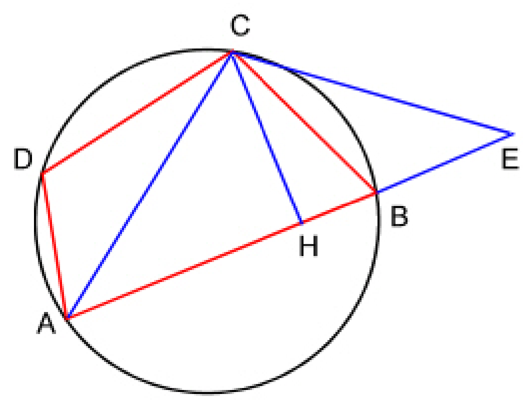
oraz wyznaczyć pole tego czworokąta w zależności od x, y i z.

Rozwiązanie

I sposób

Niech E będzie punktem prostej AB, leżącym na zewnątrz czworokąta $ABCD$ takim, że $|BE| = |AD| = y$. Zauważmy, że $\measuredangle EBC = 180° - \measuredangle ABC = \measuredangle ADC$. Ponieważ $|BE| = |AD|$ i $|BC| = |CD|$, trójkąty EBC i ACD są przystające. W szczególności mamy $|AC| = |CE|$. Niech H będzie teraz spodkiem wysokości trójkąta równoramiennego AEC opuszczonej z wierzchołka C. Zauważmy, że AC jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym ACH oraz $|AH| = (x+y)/2$. Tak więc

$$z > \frac{x+y}{2}.$$



Z przystawania trójkątów EBC i ACD wynika, że pola czworokąta $ABCD$ i trójkąta AEC są sobie równe. Z łatwością stwierdzamy, że pole trójkąta AEC wynosi:

$$\frac{x+y}{2}\sqrt{z^2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}(x+y)z\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2z}\right)^2}.$$

II sposób

Kąty $\measuredangle CAD$ i $\measuredangle CAB$ oparte są na łukach równej długości, więc są równe. Oznaczmy ich miarę przez α oraz niech $|BC| = |CD| = a$. Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkatów ABC i ACD wynikają równości:

$$a^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos\alpha$$
$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha.$$

Odejmując je stronami otrzymamy równość:

$$(x-y)(x+y-2z\cos\alpha) = 0,$$

z której wynika, że $z\cos\alpha = (x+y)/2$ lub $x = y$. Ponieważ $\alpha < 90°$, więc $\cos\alpha < 1$ i tym samym w pierwszym przypadku otrzymujemy $z > z\cos\alpha = (x+y)/2$. Jeśli natomiast $x = y$, to trójkąty ABC i ADC są przystające, co z kolei oznacza, że AC jest średnicą okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Stąd oczywiście wynika, że $z > x = (x+y)/2$.

Pole czworokąta $ABCD$ jest sumą pól trójkatów ABC i ACD, tzn.

$$\frac{1}{2}xz\sin\alpha + \frac{1}{2}yz\sin\alpha = \frac{1}{2}(x+y)z\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{2}(x+y)z\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2z}\right)^2}$$

$\square$

4. W każde pole kwadratowej tablicy 8×8 wpisano po jednej liczbie w taki sposób, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie wpisane liczby tworzą ciągi arytmetyczne. Suma liczb wpisanych w cztery narożne pola tablicy jest równa S. Wyznaczyć sumę wszystkich wpisanych liczb.

Rozwiązanie

Ponumerujmy kolejne wiersze i kolumny tablicy liczbami $1, 2, \ldots, 8$, a następnie oznaczmy przez a_{ij} liczbę wpisaną w pozycji (i, j). Zauważmy, że dla liczb wpisanych w i-tym wierszu zachodzą równości:

$$a_{i1} + a_{i8} = a_{i2} + a_{i7} = a_{i3} + a_{i6} = a_{i4} + a_{i5}.$$

Suma liczb i-tego wiersza wynosi zatem $4 \cdot (a_{i1} + a_{i8})$. Analogicznie, suma liczb j-tej kolumny jest równa $4 \cdot (a_{1j} + a_{8j})$. Tym samym suma $\overline{S}$ wszystkich liczb tablicy jest równa:

$$\begin{aligned}
\overline{S} = 4 \cdot [&(a_{11} + a_{18}) + (a_{21} + a_{28}) + (a_{31} + a_{38}) + (a_{41} + a_{48}) \\
&+ (a_{51} + a_{58}) + (a_{61} + a_{68}) + (a_{71} + a_{78}) + (a_{81} + a_{88})] \\
&= 4 \cdot (a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{81}) + 4 \cdot (a_{18} + a_{28} + \cdots + a_{88}) \\
&= 16 \cdot (a_{11} + a_{81}) + 16 \cdot (a_{18} + a_{88}) = 16S.
\end{aligned}$$

$\square$