Podlaski Konkurs Matematyczny

Rozwiązania zadań konkursowych - klasy drugie

27 maja 2006 r.

1. Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb sześciocyfrowych o niezerowych cyfrach i takich, że suma trzech pierwszych cyfr jest równa sumie trzech ostatnich. Na przykład, liczba 232115 jest elementem zbioru A ponieważ $2+3+2=1+1+5$.
Wykazać, że suma wszystkich liczb ze zbioru A jest podzielna przez 1001.

Rozwiązanie

Rozważmy dowolną liczbę sześciocyfrową $abcdef \in A$. Możliwe są dwa przypadki:
1. $abc = def$. Wtedy $abcdef = abcabc = abc + 1000 \cdot abc = 1001 \cdot abc$.
2. $abc \neq def$. Wtedy jednak $defabc \in A$ oraz

$$abcdef + defabc = 1000 \cdot abc + def + 1000 \cdot def + abc = 1001 \cdot (abc + def)$$

.

Zbiór A składa się z wszystkich liczb postaci $abcabc$ (przypadek 1) oraz liczb, które można ustawić pary $(abcdef, defabc)$, w których $abc \neq def$ oraz $a+b+c = d+e+f$ (przypadek 2). Z powyższego wynika zatem, że suma wszystkich liczb ze zbioru A jest podzielna przez 1001. $\square$

2. Liczby a i b są takie, że równanie $x^2 + ax + b = 0$ ma dwa niezerowe pierwiastki będące liczbami całkowitymi. Rozstrzygnąć czy $a^2 + (b-1)^2$ może być liczbą pierwszą?

Rozwiązanie

Niech x_1, x_2 będą niezerowymi całkowitymi pierwiatkami trójmianu kwadratowego x^2+ax+b. Mamy

$$x_1 + x_2 = -a \text{ oraz } x_1 x_2 = b.$$

Stąd

$$a^2 + (b-1)^2 = (x_1+x_2)^2 + (x_1x_2 - 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 + 1 = (x_1^2+1)(x_2^2+1).$$

Ponieważ $x_1^2 + 1 \geqslant 2$ i $x_2^2 + 1 \geqslant 2$ są liczbami całkowitymi, więc $a^2 + (b-1)^2$ nie jest liczbą pierwszą. $\square$

3. Na bokach trójkąta ABC obrano kolejno punkty A_1, B_1 i C_1 w ten sposób, że $A_1 \in \overline{BC}$, $B_1 \in \overline{AC}$ i $C_1 \in \overline{AB}$. Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach AC_1B_1, BA_1C_1 i CB_1A_1 mają punkt wspólny.

Rozwiązanie

Rozważmy okręgi opisane na trójkątach AC_1B_1 i C_1BA_1. Przecinają się one w punktach: C_1 oraz O (może się zdarzyć, że $C_1 = O$). Udowodnimy, że punkt O należy do okręgu opisanego na trójkącie A_1B_1C. W tym celu zauważmy, że

$$\angle C_1OB_1 = 180^\circ - \angle C_1AB_1 \text{ oraz } \angle C_1OA_1 = 180^\circ - \angle C_1BA_1,$$

a więc

$$\angle A_1OB_1 = 360^\circ - (\angle C_1OB_1 + C_1OA_1) = \angle C_1AB_1 + \angle C_1BA_1 = 180^\circ - \angle A_1CB_1.$$

Z powyższego wynika, że punkty A_1, O, B_1 i C leżą na jednym okręgu (oczywiście opisanym na trójkącie A_1B_1C. $\square$

4. W pola kwadratowej tablicy 10×10 wpisano różne liczby naturalne. Wykazać, że w pewne dwa sąsiednie pola (tzn. pola mające wspólny bok) wpisano liczby różniące się co najmniej o 6.

Rozwiązanie

Niech m będzie najmniejszą zaś M największą z wpisanych liczb. Wszystkie liczby są różne i całkowite, więc $M - m \geqslant 99$. Rozważmy najkrótszą drogę od liczby M do liczby m prowadzącą przez sąsiednie pola tablicy. Z łatwością stwierdzamy, że taka droga składa się z co najwyżej dziewiętnastu pól (włączając pola w których znajdują się liczby M i m). Wypiszmy liczby stojące w sąsiednich polach rozważanej drogi:

$$M = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k = m, \quad \text{gdzie} \ \ k \leqslant 19.$$

Zauważmy, że jeśli $|x_i - x_{i+1}| \leqslant 5$ dla $i = 1, 2, \ldots k-1$, to

$$\begin{aligned} |M - m| &= |(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_{k-1} - x_k)| \\ &\leqslant |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \cdots + |x_{k-1} - x_k| \\ &\leqslant 18 \cdot 5 = 90 < 99. \end{aligned}$$

Uzyskana sprzeczność dowodzi, iż pewne dwie sąsiednie liczby rozważanej drogi różnią się o nie mniej niż 6. $\square$

[pg]