

V Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

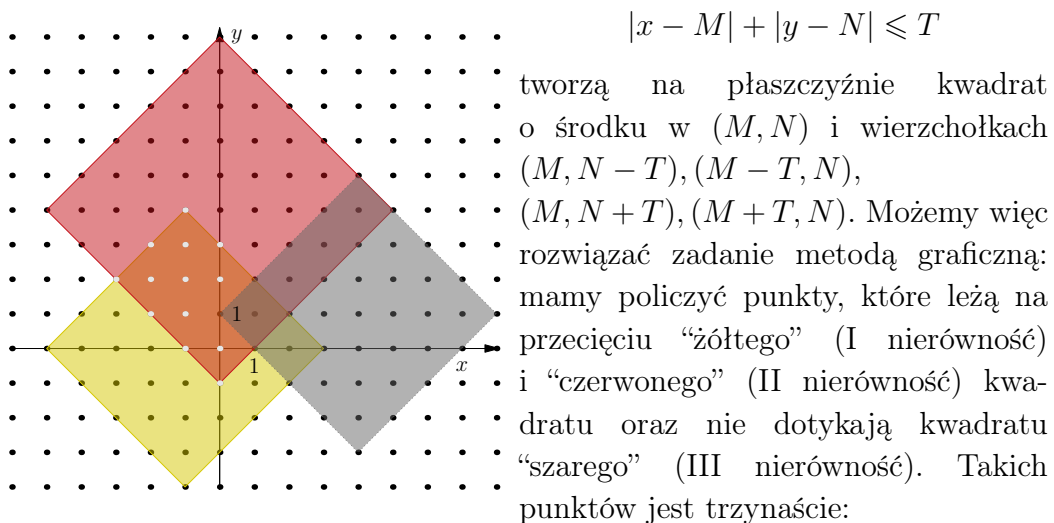
Rozwiązania - klasy drugie

1. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniające nierówności

$$\begin{cases} |x + 1| + |y| & \leq 4 \\ |x| + |y - 4| & \leq 5 \\ |x - 4| + |y - 1| & > 4. \end{cases}$$

Rozwiązanie.

Ważne jest zauważenie, że liczby spełniające nierówność



$$(x, y) = (-3, 2), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-1, 0), (-1, 1), \\ (-1, 2), (-1, 3), (-1, 4), (0, -1), (0, 0), (0, 2), (0, 3).$$

Pozostaje uzasadnić uwagę o kwadracie poczynioną na początku rozwiązania. Zauważmy, że nierówność $|a| \leq b$ jest równoważna jednoczesnemu zachodzeniu nierówności $a \leq b$ oraz $-a \leq b$. Wynika stąd, że nierówność $|x - M| + |y - N| \leq T$ jest równoważna jednoczesnemu zachodzeniu czterech nierówności

$$x - M + y - N \leq T \text{ oraz } x - M + N - y \leq T \text{ oraz } M - x + y - N \leq T \text{ oraz } M - x + N - y \leq T,$$

które łącznie są równoważne układowi nierówności

$$M + N - T \leq x + y \leq T + M + N \text{ oraz } M - N - T \leq x - y \leq T + M - N,$$

które wyznaczają kwadrat o wierzchołkach $(M, N - T)$, $(M - T, N)$, $(M, N + T)$, $(M + T, N)$.

2. W czworościanie $ABCS$ wszystkie kąty przy wierzchołku S są proste. Dowieść, że odległość środka sfery opisanej na czworościanie od płaszczyzny ABC jest nie większa niż

$$\frac{\sqrt{|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2}}{6}$$

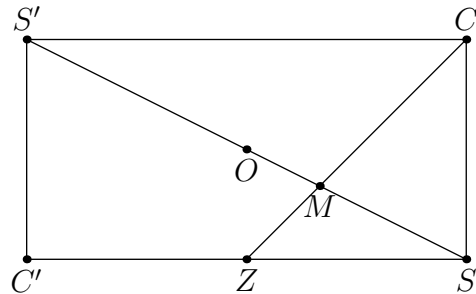
oraz stwierdzić, dla których czworościanów zachodzi równość.

Rozwiązanie.

Oświecające jest wyobrażenie sobie uzupełnienia czworościanu $ABCS$ do prostopadłościanu $AC'BSB'S'A'C$ — wtedy O jest środkiem sfery opisanej na tym prostopadłościanie, czyli przykładowo jest on środkiem przekątnej SS' (w jednym z następujących rozwiązań znajduje się rysunek przestrzenny).

Niech M będzie punktem przecięcia przekątnej SS' z płaszczyzną ABC . Chcemy policzyć stosunek $OM : SS'$. W tym celu popatrzymy na przecięcie prostopadłościanu z płaszczyzną $SCS'C'$.

Niech Z oznacza środek odcinka SC' , który jest jednocześnie środkiem odcinka AB , czyli leży w płaszczyźnie ABC . Wobec tego ABC przecina $SCS'C'$ wzdłuż odcinka CZ . Punkt M leży na SS' i ABC , więc jest on przecięciem CZ i SS' .



Trójkąty ZMS , CMS' są podobne w skali $1 : 2$, czyli $MS = \frac{SS'}{3}$. Skoro $OS = \frac{SS'}{2}$, to

$$MO = \frac{SS'}{6} = \frac{\sqrt{|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2}}{6}.$$

To dowodzi nierówności z zadania. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy M jest rzutem O na płaszczyznę ABC , czyli gdy przekątna SS' jest prostopadła do tej płaszczyzny, innymi słowy, gdy rzut S na ABC pokrywa się z rzutem O .

Rzut O na płaszczyznę ABC jest, z twierdzenia Pitagorasa, środkiem okręgu opisanego na $\triangle ABC$. Jeżeli rzut S pokrywa się z nim, to, ponownie z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy $SA = SB = SC$. Rozumowanie w drugą stronę implikuje, że $SA = SB = SC$ wystarcza do tego, żeby w nierówności z zadania zaszła równość.

II rozwiązanie

Dość proste okazuje się w tym zadaniu podejście obliczeniowe. Wprowadzamy układ współrzędnych tak, że

$$S = (0, 0, 0), \quad A = (a, 0, 0), \quad B = (0, b, 0), \quad C = (0, 0, c).$$

Dorysowując prostopadłościan jak w poprzednim rozwiązaniu (lub inną metodą) wyliczamy, że $O = (a/2, b/2, c/2)$. Równanie płaszczyzny ABC wylicza się jako

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Niech $M := (a/3, b/3, c/3)$, wtedy z równania widzimy, że M leży w płaszczyźnie ABC . Ponadto

$$MO = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{6}$$

wobec tego odległość O od płaszczyzny ABC jest nie większa od podanej w zadaniu. Kiedy zachodzi równość? Dokładnie wtedy, gdy M jest rzutem O na płaszczyznę ABC . Znaczący to tyle, że trójkąty AMO, BMO, CMO są prostokątne z kątem prostym przy M , innymi słowy, że $AM^2 + MO^2 = AO^2, BM^2 + MO^2 = BO^2, CM^2 + MO^2 = CO^2$ czyli

$$AM^2 = BM^2 = CM^2 = CO^2 - MO^2. \quad (1)$$

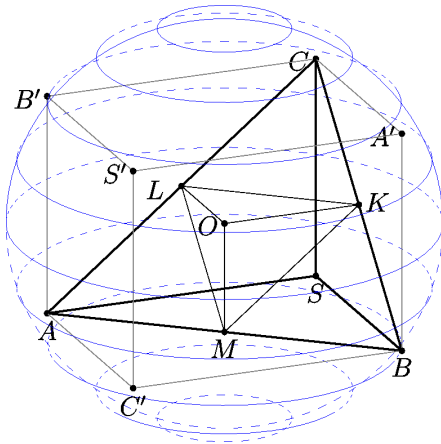
Obliczamy

$$AM^2 = \left(a - \frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2, \quad BM^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2,$$

stąd równość $AM^2 = BM^2$ implikuje $a = b$. Analogicznie z $AM^2 = CM^2$ wynika $a = c$. Tak więc $a = b = c$ jest konieczne, by zaszła równość. Z drugiej strony jeżeli $a = b = c$ bez problemu obliczamy, że warunek z równania (1) jest spełniony, więc równość zachodzi.

Interesujące może być zauważenie, że M jest środkiem ciężkości $\triangle ABC$ a my dowodzimy, że jeżeli środek ciężkości i środek okręgu opisanego pokrywają się, to trójkąt jest równoboczny.

III rozwiązanie



Oznaczmy środek sfery opisanej przez O . Tak jak w pierwszym rozwiązaniu, oświetające jest wyobrażenie sobie uzupełnienia czworościanu $ABCS$ do prostopadłościanu $AC'B'SB'S'A'C$ — wtedy O jest środkiem sfery opisanej na tym prostopadłościanie. Oznaczmy przez H_O, H_S rzuty prostopadłe punktów O, S na płaszczyznę ABC . Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że odległości H_O od A, B, C są równe, więc H_O jest środkiem okręgu opisanego na $\triangle ABC$.

Oznaczmy przez K, L, M środki odcinków BC, CA, AB odpowiednio. Zauważmy, że są to środki przekątnych ścian prostopadłościanu, więc są to rzuty punktu O na ściany BCS, CAS, ABS . Czwościan $KLMO$ ma wszystkie kąty przy O proste oraz krawędzie długości $KO = AS/2, LO = BS/2, MO = CS/2$, czyli czwościan ten jest podobny do $ABCS$ w skali $1/2$. Ponadto płaszczyzna KLM to płaszczyzna ABC , więc OH_O jest wysokością opuszczoną z O w czwościanie $KLMO$ i z podobieństwa czwościanów $KLMO \sim ABCS$ wnioskujemy, że

$$OH_O = \frac{1}{2}SH_S, \text{ czyli } 2 \cdot OH_O = SH_S.$$

Wreszcie, odcinek OS przecina płaszczyznę KLM w pewnym punkcie Z i mamy nierówności $OZ \geq OH_O$ oraz $SZ \geq SH_S$, czyli

$$3 \cdot OH_O = OH_O + SH_S \leq OZ + SZ = OS = \frac{\sqrt{|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2}}{2},$$

co daje nierówność z tezy. Równość w nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $OZ = OH_O$ oraz $SZ = SH_S$, czyli $Z = H_O = H_S$. Znaczy to tyle, że H_S jest środkiem okręgu opisanego na $\triangle ABC$, więc z twierdzenia Pitagorasa $AS = BS = CS$. Ponadto jeżeli $AS = BS = CS$, to odwrotne rozumowanie pokazuje, że mamy równość w nierówności z tezy.

3. Liczby a, b są całkowite dodatnie. Uzasadnić, że istnieje takie c , że w nieskończonym ciągu arytmetycznym $b, a + b, 2a + b, 3a + b, \dots$ jest nieskończenie wiele liczb o sumie cyfr c .

Rozwiązanie.

Zapiszmy liczby a, b cyframi:

$$a = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}, \quad b = \overline{b_s b_{s-1} \dots b_0}.$$

Weźmy $N \geq s + 1$. Wtedy wyraz $10^N a + b$ zapisuje się jako

$$10^N a + b = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0 \underbrace{00 \dots 00}_{N-s-1} b_s b_{s-1} \dots b_0},$$

więc w szczególności jego suma cyfr jest równa sumie cyfr a powiększonej o sumę cyfr b . Biorąc $c := (\text{suma cyfr } a) + (\text{suma cyfr } b)$ otrzymujemy nieskończenie wiele wyrazów ciągu o sumie c — wyrazy $10^N a + b$ dla $N = s + 1, s + 2, \dots$

4. Okrąg o opisany na trójkącie ABC ma promień r . Wykazać, że jeżeli koła o środkach A, B, C i promieniach r pokrywają koło ograniczone okręgiem o , to trójkąt ABC jest równoboczny.

Rozwiązanie.

Do porównywania długości boków trójkątów przyda nam się następujący fakt

Lemat 1. *Jeżeli w trójkącie ABC zachodzi $AC = BC$ oraz $\sphericalangle ACB > 60^\circ$ to $AB > AC$.*

Dowód. Prawdopodobnie najprościej uzasadnić lemat przy użyciu twierdzenia sinusów; my jednak trzymamy się klasycznej geometrii.

Z warunku $\sphericalangle ACB > 60^\circ$ wynika $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA < 60^\circ$. Wybierzmy punkt D leżący po tej samej stronie AB co C i taki, że $\triangle ABD$ jest równoboczny. Z warunku $\sphericalangle CBA < 60^\circ$ wynika, że C leży wewnątrz $\triangle ABD$. Teraz, przykładowo korzystając z twierdzenia Pitagorasa, można uzasadnić, że $AD > AC$. \square

Oznaczmy $\alpha := \sphericalangle BAC, \beta := \sphericalangle CBA, \gamma := \sphericalangle ACB$. Niech D będzie środkiem tego łuku BC okręgu o na którym nie leży A . Załóżmy, że koła o środkach A, B, C i promieniach r pokrywają koło ograniczone przez o , wtedy D musi należeć do któregoś z tych

kół. Popatrzmy na trójkąty równoramienne AOD, BOD, COD . Obliczamy miary kątów

$$\sphericalangle BOD = \alpha, \quad \sphericalangle COD = \alpha, \quad \sphericalangle AOD = \min(2\gamma + \alpha, 2\beta + \alpha).$$

Zachodzi $AD \leq OD$ lub $BD \leq OD$ lub $CD \leq OD$, więc na mocy lematu 1 musi zachodzić jeden z warunków

$$\alpha = \sphericalangle BOD \leq 60^\circ \text{ lub } \alpha = \sphericalangle COD \leq 60^\circ \text{ lub } \min(2\gamma + \alpha, 2\beta + \alpha) = \sphericalangle AOD \leq 60^\circ.$$

Zauważmy, że którykolwiek z warunków zachodzi i tak mamy zależność $\alpha \leq 60^\circ$.

Powtarzając rozumowanie możemy wywnioskować, że $\beta \leq 60^\circ$ oraz $\gamma \leq 60^\circ$. Skoro $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, to wynika stąd, że $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

[pg, jj]