



**ROZWIĄZANIA ZADAŃ
PRZYGOTOWAWCZYCH - 2005**

KLASY PIERWSZE

Zadanie 1. Niech $N = \underbrace{999 \dots 99}_{n \text{ dziewiątek}}$. Obliczyć sumę cyfr liczby N^3 .

Rozwiązanie.

Zauważmy, że $N = 10^n - 1$. Mamy więc

$$\begin{aligned} N^3 &= 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1 = 10^{3n} - 1 - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n \\ &= \underbrace{999 \dots 99}_{3n \text{ dziewiątek}} - \underbrace{3 \ 000 \dots 00}_{2n \text{ zer}} + \underbrace{3 \ 000 \dots 00}_{n \text{ zer}} = \underbrace{999 \dots 99}_{n-1 \text{ dziewiątek}} \ 6 \ \underbrace{999 \dots 99}_{2n \text{ dziewiątek}} \\ &\quad + \underbrace{3 \ 000 \dots 00}_{n \text{ zer}} = \underbrace{999 \dots 99}_{n-1 \text{ dziewiątek}} \ 7 \ \underbrace{000 \dots 00}_{n-1 \text{ zer}} \ 2 \ \underbrace{999 \dots 99}_{n \text{ dziewiątek}} \end{aligned}$$

Wynika stąd, że suma cyfr liczby N^3 wynosi $9(n-1) + 7 + 2 + 9n = 18n$. □

* * *

Zadanie 2. a) Wykazać, że jeśli $p > 3$ jest liczbą pierwszą, to liczba $p^2 - 1$ dzieli się przez 24.
b) Wykazać, że jeśli $p > 5$ jest liczbą pierwszą, to liczba $p^4 - 1$ dzieli się przez 240.

Rozwiązanie

a) Por. zadanie 11 z Zadań Przygotowawczych z roku 2003.

b) Mamy $240 = 16 \cdot 3 \cdot 5$. Jeśli $p > 5$ jest liczbą pierwszą, to $p = 4k \pm 1$, $p = 3l \pm 1$ i $p = 5m + r$ dla pewnych liczb naturalnych k, l, m oraz $1 \leq r \leq 4$. Stąd

$$\begin{aligned} p^4 - 1 &= (4k \pm 1)^4 - 1 = (4k)^4 \pm 4(4k)^3 + 6(4k)^2 \pm 4(4k) \\ &= 16(16k^4 \pm 16k^3 + 6k^2 \pm k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^4 - 1 &= (3l \pm 1)^4 - 1 = (3l)^4 \pm 4(3l)^3 + 6(3l)^2 \pm 4(3l) \\ &= 3(27l^4 \pm 36l^3 + 18l^2 \pm 4l), \end{aligned}$$

Podobnie stwierdzamy, że dla pewnej liczby naturalnej s , $p^4 - 1 = 5s + r^4 - 1$. Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $r = 1, 2, 3, 4$ zachodzi podzielność $5 \mid r^4 - 1$. Tak więc z powyższego wnosimy, że $240 \mid p^4 - 1$. □

* * *

Zadanie 3. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $5^x = 3y + 7$.

Rozwiązanie

Jeśli liczby całkowite x, y spełniają równanie $5^x = 3y + 7$, to 5^x jest liczbą całkowitą, a więc $x \geq 0$. Zauważmy, że

$$5^x = (6 - 1)^x = \begin{cases} 6k + 1, & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą parzystą;} \\ 6k - 1, & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą nieparzystą.} \end{cases}$$

dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej k . Jeśli x jest liczbą parzystą, to $y = \frac{5^x - 7}{3} = \frac{6k+1-7}{3} = 2k - 2$ jest liczbą całkowitą. Jeśli zaś x jest liczbą nieparzystą, to $y = \frac{5^x - 7}{3} = \frac{6k-1-7}{3} = 2k - \frac{8}{3}$ nie jest liczbą całkowitą. Tak więc pary

$$\left(x, \frac{5^x - 7}{3}\right), \text{ gdzie } x \text{ jest nieujemną liczbą parzystą}$$

stanowią zbiór wszystkich rozwiązań równania w liczbach całkowitych. □

* * *

Zadanie 4. Która z liczb

$$1, \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$$

jest większa?

Rozwiązanie

Niech $a = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$. Ponieważ $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$, więc

$$\begin{aligned} a^3 &= (2 - \sqrt{5}) + (2 + \sqrt{5}) + 3\sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})} \left(\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\right) \\ &= 4 - 3a \end{aligned}$$

Tak więc a jest pierwiastkiem równania $x^3 + 3x - 4 = 0$. Zauważmy, że $x^3 + 3x - 4 = x^3 - 1 + 3(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 4)$ oraz $x^2 + x + 4 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0$. Tak więc $x = 1$ jest jedynym pierwiastkiem powyższego równania. Wynika stąd, że $a = 1$. □

* * *

Zadanie 5. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3 \\ \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Podnosząc obustronnie do kwadratu pierwsze równanie otrzymamy:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + 2\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right) = 9$$

czyli po uwzględnieniu drugiego równania

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} = 3.$$

Analogicznie podnosząc obustronnie do kwadratu drugie równanie, po uwzględnieniu pierwszego równania otrzymamy:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} = 3.$$

Kontynuując to rozumowanie z łatwością stwierdzamy, że dla dowolnej liczby $k \geq 1$:

$$\frac{x^{2^k}}{y^{2^k}} + \frac{y^{2^k}}{z^{2^k}} + \frac{z^{2^k}}{x^{2^k}} = 3 \quad \text{oraz} \quad \frac{y^{2^k}}{x^{2^k}} + \frac{z^{2^k}}{y^{2^k}} + \frac{x^{2^k}}{z^{2^k}} = 3.$$

Zauważmy, że dla liczby $a > 1$ istnieje $k \geq 1$ takie, że $a^{2^k} > 3$. Tak więc z powyższych równości wnosimy, że

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2}{z^2} = \frac{z^2}{x^2} = 1.$$

Z pierwszego równania układu wynika teraz, że $x = y = z$, a z ostatniego: $x = y = z = 1$.

Uwaga. Inne rozwiązanie można otrzymać wykorzystując nierówność między średnimi, arytmetyczną i geometryczną, liczb nieujemnych:

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

w której równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = c$. Korzystając z tej nierówności mamy

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y^2}{z^2} \cdot \frac{z^2}{x^2}} = 3.$$

Musi więc być:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2}{z^2} = \frac{z^2}{x^2} = 1.$$

□

Zadanie 6. Dla liczby naturalnej $n \geq 2$ wyznaczyć wszystkie ciągi (x_1, x_2, \dots, x_n) takie, że każda z liczb x_i jest równa kwadratowi sumy wszystkich pozostałych liczb.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez S sumę wszystkich poszukiwanych liczb x_i . Zgodnie z założeniami, każda z liczb x_i jest pierwiastkiem równania

$$(S - x)^2 = x.$$

Wynika stąd w szczególności, że $x_i \geq 0$, a więc $S \geq 0$. Jeśli $S = 0$, to $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ oraz oczywiście ciąg $(0, 0, \dots, 0)$ spełnia warunki zadania.

Założmy, że $S > 0$. Powyższe równanie zapiszmy w postaci

$$x^2 - (2S + 1)x + S^2 = 0.$$

Ma ono dwa pierwiastki:

$$\hat{x} = \frac{2S + 1 - \sqrt{4S + 1}}{2} \quad \text{oraz} \quad \tilde{x} = \frac{2S + 1 + \sqrt{4S + 1}}{2}.$$

Zauważmy, że $\tilde{x} > S$, a więc \tilde{x} nie może być wyrazem poszukiwanego ciągu. Stąd wynika, że wszystkie wyrazy muszą być równe \hat{x} oraz oczywiście $\hat{x} = S/n$. Uwzględniając to w powyższym równaniu obliczamy

$$S = \frac{n}{(n-1)^2} \quad \text{i} \quad x_1 = x_2 = \dots = \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Ostatecznie mamy dwa ciągi spełniające warunki zadania:

$$(0, 0, \dots, 0) \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{1}{(n-1)^2}, \frac{1}{(n-1)^2}, \dots, \frac{1}{(n-1)^2} \right).$$

□

Zadanie 7. Jaka minimalną wartość może przyjąć suma długości przekątnych czworokąta wypukłego o polu S ?

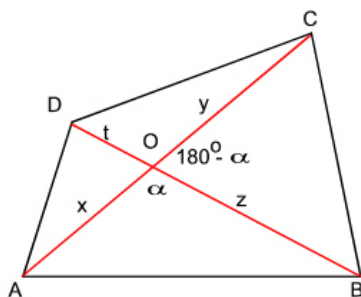
Rozwiązanie

Niech a, b będą długościami przekątnych czworokąta oraz α miarą kąta między tymi przekątnymi. Ponieważ $S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$ (por. *Uwaga* poniżej), więc korzystając z nierówności między średnimi, arytmetyczną i geometryczną, otrzymujemy:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}} \geq \sqrt{2S}.$$

Tak więc, $a+b \geq 2\sqrt{2S}$. Z łatwością stwierdzamy, że suma długości przekątnych kwadratu o polu S jest równa $2\sqrt{2S}$.

Uwaga. Udowodnimy, że $S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$, gdzie $a = |AC|, b = |BD|$.



Oczywiście S jest sumą pól trójkątów AOB, BOC, COD i DOA , a więc

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}xz \sin \alpha + \frac{1}{2}zy \sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2}yt \sin \alpha + \frac{1}{2}xt \sin(180^\circ - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}(xz + zy + yt + xt) \sin \alpha = \frac{1}{2}(x+y)(z+t) \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2}ab \sin \alpha. \end{aligned}$$

□

Zadanie 8. Liczby x, y, z są takie, że $x+y+z = 0$ oraz $x^2+y^2+z^2 = 1$. Wykazać, że przynajmniej jedna z liczb xy, yz, zx jest nie większa niż $-1/3$.

Rozwiązanie

Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $x \leq y \leq z$. Z założeń wynika teraz, że $x < 0$ oraz $0 < z < 1$. Zauważmy, że jeśli $0 \leq y$, to korzystając z faktu, że $x = -y - z$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + y^2 + z^2 = (-y - z)^2 + y^2 + z^2 = 2y^2 + 2z^2 + 2yz \\ &\geq 2y^2 + 2y^2 + 2y^2 = 6y^2. \end{aligned}$$

Podobnie jeśli $y < 0$, to

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2xy \\ &\geq 2y^2 + 2y^2 + 2y^2 = 6y^2. \end{aligned}$$

W obu przypadkach otrzymaliśmy, że $y^2 \leq \frac{1}{6}$. Mamy też $1 = x^2 + (-x - z)^2 + z^2 = 2x^2 + 2z^2 + 2xz$, czyli

$$xz = \frac{1}{2} - x^2 - z^2 = \frac{1}{2} - (1 - y^2) = y^2 - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}.$$

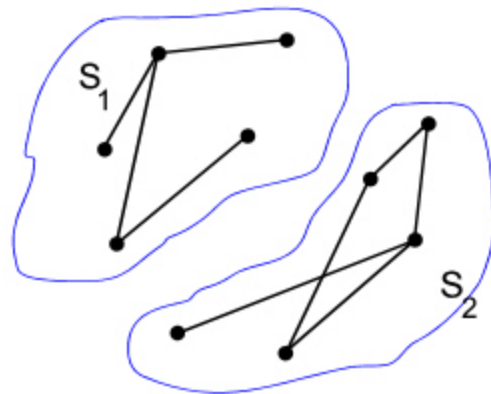
□

Zadanie 9. Trener tenisa, opiekujący się grupą 16 zawodników, zaplanował 12 gier kontrolnych między tymi zawodnikami. Według przygotowanego planu każdy z zawodników rozegra przynajmniej jeden mecz. Wykazać, że pewne cztery mecze mogą być rozegrane w tym samym czasie (oczywiście na czterech różnych kortach).

Rozwiązanie

Sytuację przedstawioną w zadaniu zobrazujemy geometrycznie. Na płaszczyźnie narysujemy tyle punktów ilu jest zawodników i tak aby żadne trzy nie były współliniowe. Każdemu z zawodników przyporządkujemy dokładnie jeden z narysowanych punktów. Fakt, że dwaj zawodnicy mają zaplanowany mecz między sobą zilustrujemy łącząc odcinkiem punkty odpowiadające tym zawodnikom. W ten sposób powstanie tzw. *graf*, który oznaczymy przez \mathcal{G} . Narysowane punkty nazwijmy *wierzchołkami* grafu \mathcal{G} , zaś odcinki *krawędziami*. Zauważmy, że graf \mathcal{G} składa się z pewnej liczby rozłącznych części o tej własności, że w obrębie każdej z nich między dowolnymi wierzchołkami istnieje droga wzdłuż pewnych krawędzi (być może przechodząca przez inne wierzchołki). Każdą z tych części nazwiemy *spójną składową* grafu \mathcal{G} .

Niech S_1, S_2, \dots, S_N będą wszystkimi spójnymi składowymi w \mathcal{G} . Naszym celem będzie ustalenie zależności między ilością N spójnych składowych, ilością K krawędzi i ilością W wierzchołków grafu \mathcal{G} . Oznaczmy przez K_i oraz W_i odpowiednie liczby krawędzi i wierzchołków spójnej składowej S_i . Z łatwością możemy zauważyć, że $K_i \geq W_i - 1$. Istotnie, składową S_i można narysować zaczynając od jednej (dowolnie wybranej) krawędzi, a następnie dołączając w każdym kroku krawędź mającą wspólny wierzchołek z pewną krawędzią już narysowaną. W każdym kroku liczba narysowanych wierzchołków wzrasta maksymalnie o jeden.



Tak więc

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 + \dots + K_N \\ &\geq (W_1 - 1) + (W_2 - 1) + \dots + (W_N - 1) = W - N. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zatem zależność:

$$K + N \geq W.$$

Wracając do zadania, z założeń wynika, że $W = 16$, $K = 12$ oraz każda spójna składowa zawiera przynajmniej dwa wierzchołki (bo każdy zawodnik rozegra mecz). Tak więc liczba spójnych składowych $N \geq 4$. Oznacza to oczywiście, że przynajmniej cztery mecze mogą być rozegrane w tym samym czasie.

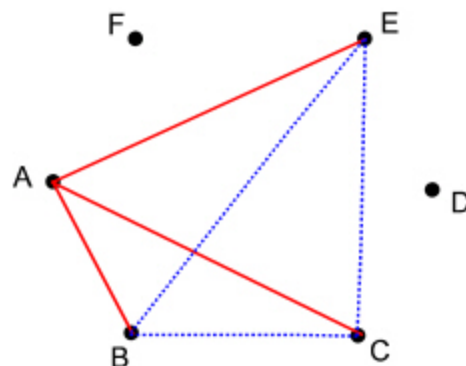
□

- Zadanie 10.** a) W turnieju piłkarskim uczestniczy 6 zespołów. Każdy z każdym rozgrywa jeden mecz. Rozgrywki odbywają się w dwóch miastach. Udowodnić, że pewne trzy zespoły rozegrają wszystkie mecze między sobą w jednym mieście.
- b) W turnieju piłkarskim uczestniczy 18 zespołów. Każdy z każdym rozgrywa jeden mecz. Rozgrywki odbywają się w trzech miastach. Udowodnić, że pewne trzy zespoły rozegrają wszystkie mecze między sobą w jednym mieście.

Rozwiązanie

a) Podobnie jak w zadaniu 9 opisanej sytuacji przyporządkujemy graf \mathcal{G}_6 , którego wierzchołki odpowiadają zespołom piłkarskim. Ponieważ każdy zespół ma rozegrać mecz z każdym innym, więc każda para wierzchołków w \mathcal{G}_6 jest połączona krawędzią (jedną!). Krawędzie grafu \mathcal{G}_6 pokolorujemy dwoma kolorami - czerwonym i niebieskim, w zależności od miasta, w którym odpowiadające drużyny mają rozegrać mecz.

Weźmy pod uwagę dowolny wierzchołek A . Spośród pięciu krawędzi wychodzących z A , przynajmniej trzy są tego samego koloru. Powiedzmy, że AB , AC i AE są czerwone. Wtedy możliwe są dwa przypadki: albo wszystkie krawędzie łączące wierzchołki B, C, E są niebieskie (wtedy zespoły B, C, E rozgrywają mecze między sobą w jednym mieście), albo przynajmniej jedna z tych krawędzi jest czerwona. Jeśli np. BE jest czerwona, to zespoły A, B, E rozgrywają mecze między sobą w jednym mieście.



b) Podobnie jak w części a) rozważymy graf \mathcal{G}_{18} z osiemnastoma wierzchołkami, w którym z każdego wierzchołka wychodzi siedemnaście krawędzi. Tym razem krawędzie pokolorujemy trzema kolorami: czerwonym, niebieskim i zielonym. Rozważmy dowolny wierzchołek A . Spośród siedemnastu krawędzi wychodzących z A przynajmniej sześć jest tego samego koloru. Powiedzmy, że krawędzie łączące A z B, C, D, E, F, G są czerwone. Jeśli wśród krawędzi łączących wzajemnie wierzchołki B, C, D, E, F, G jest czerwona, to jej końce wraz z A wyznaczają trójkąt z czerwonymi krawędziami. Jeśli takiej krawędzi nie ma, to wszystkie krawędzie łączące wzajemnie B, C, D, E, F i G są pomalowane kolorami niebieskim i zielonym. Na podstawie zadania a) pewne trzy wierzchołki spośród B, C, D, E, F, G są połączone krawędziami tego samego koloru.

□

* * *

- Zadanie 11.** Z pola E1 do pola E8 szachownicy król może dojść w siedmiu ruchach. Ilość różnych drógami może to zrobić?

Rozwiązanie

Zauważmy, że każdy ruch króla powinien przemieszczać go do następnego 'wiersza' (położonego wyżej). W przeciwnym razie droga do E8 będzie składała się z przynajmniej ośmiu ruchów. Na rysunku obok liczby wpisane w pola szachownicy mówią o ilości najkrótszych dróg od E1 do danego pola. Zauważmy, że każda z wpisanych liczb jest sumą trzech sąsiadujących i umieszczonych pod nią liczb. Tak więc istnieje 393 różnych dróg króla (w siedmiu ruchach) od pola E1 do pola E8.

8				393					
7			126	141	126				
6		30	45	51	45	30			
5	4	10	16	19	16	10	4		
4		1	3	6	7	6	3	1	
3			1	2	3	2	1		
2				1	1	1			
1				0					
	A	B	C	D	E	F	G	H	

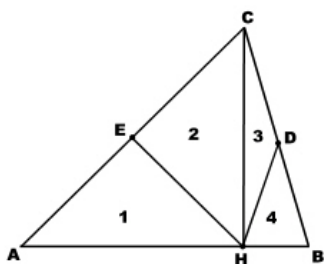
□

* * *

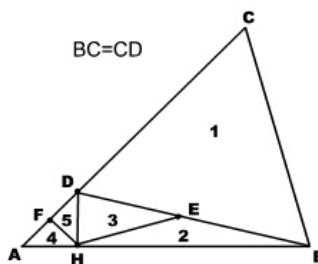
Zadanie 12. Udowodnić, że każdy trójkąt można podzielić na 2005 trójkątów równoramiennych.

Rozwiązanie

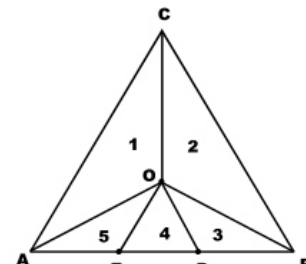
Udowodnimy indukcyjnie, że dla liczby naturalnej $n \geq 4$ dowolny trójkąt można podzielić na n trójkątów równoramiennych. W tym celu zauważmy najpierw, że w trójkącie prostokątnym odcinek łączący wierzchołek przy kącie prostym ze środkiem przeciwprostokątnej dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty równoramienne. Stąd wynika podział dowolnego trójkąta na cztery trójkąty równoramienne. W tym celu wystarczy poprowadzić wysokość dzielącą dany trójkąt na dwa trójkąty prostokątne, a następnie zastosować wyżej opisany podział do trójkątów prostokątnych (zob. rysunek A). Rysunki B i C przedstawiają podziały trójkątów nierównobocznego i równobocznego na pięć trójkątów równoramiennych.



rys. A



rys. B



rys. C

Niech teraz $n \geq 5$ i założmy, że każdy trójkąt można podzielić na k ($4 \leq k \leq n$) trójkątów równoramiennych. Podzielmy dowolny trójkąt T jego wysokością na dwa trójkąty prostokątne. Jeden z tych trójkątów podzielmy na dwie części środkową poprowadzoną z wierzchołka przy kącie prostym, a drugi na mocy założenia indukcyjnego na $n - 1$ trójkątów równoramiennych. W ten sposób otrzymamy podział T na $n + 1$ trójkątów równoramiennych.

□

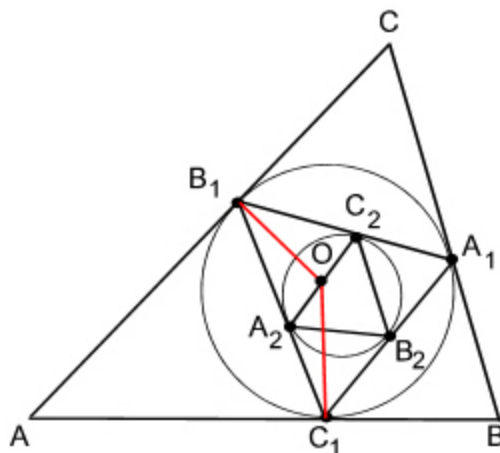
* * *

Zadanie 13. W trójkąt ABC wpisano okrąg. Punkty styczności okręgu z bokami trójkąta oznaczono odpowiednio przez A_1, B_1, C_1 , przy czym $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in$

AB . Następnie w trójkąt $A_1B_1C_1$ wpisano okrąg, a punkty styczności oznaczono odpowiednio przez A_2, B_2, C_2 . Czynność tę powtórzono n razy, otrzymując w końcu trójkąt $A_nB_nC_n$. Okazało się, że trójkąty ABC i $A_nB_nC_n$ są podobne. Wyznaczyć miary ich kątów.

Rozwiązanie

Niech α, β, γ będą miarami kątów przy wierzchołkach A, B, C trójkąta ABC oraz niech $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ oznaczają odpowiednie miary kątów przy wierzchołkach A_k, B_k, C_k trójkąta $A_kB_kC_k$. Niech O będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Ponieważ $OB_1 \perp AC$ i $OC_1 \perp AB$, mamy $\angle B_1OC_1 = \pi - \alpha$. Ponadto kąty $\angle B_1A_1C_1$ i $\angle B_1OC_1$ są odpowiednio kątami wpisanym i środkowym (opartymi na tym samym łuku), więc $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$. Z tych samych powodów dla dowolnej liczby $k \geq 1$ mamy zależność:



$$\alpha_{k+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_k}{2}.$$

Stąd wynika, że:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_{n-1}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_{n-2}}{4} = \dots \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2^n} \right) + (-1)^n \frac{\alpha}{2^n} \\ &= S + T\alpha, \end{aligned}$$

gdzie $S = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2^n}$, $T = \frac{(-1)^n}{2^n}$. Analogicznie obliczamy, że $\beta_n = S + T\beta$ oraz $\gamma_n = S + T\gamma$. Trójkąty $A_nB_nC_n$ i ABC są podobne, więc trójka $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ jest jedną z sześciu permutacji zbioru $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Jeśli $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) = (\alpha, \beta, \gamma)$, to z powyższych zależności wynika, iż $\alpha = \beta = \gamma = S/(1 - T)$. Tak więc $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$.

Jeśli $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) = (\beta, \alpha, \gamma)$, to

$$\begin{cases} S + T\alpha = \beta \\ S + T\beta = \alpha \\ S + T\gamma = \gamma \end{cases}$$

Odejmując stronami dwa pierwsze równania otrzymujemy $T(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$. Ponieważ $T \neq -1$, obliczamy: $\alpha = \beta = \gamma = S/(1 - T)$. Zatem w tym przypadku również $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$. Analogicznie rozpatrujemy przypadki, gdy $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) = (\gamma, \beta, \alpha)$ i $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) = (\alpha, \gamma, \beta)$.

Jeśli $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) = (\beta, \gamma, \alpha)$ lub $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) = (\gamma, \alpha, \beta)$, to

$$\begin{cases} S + T\alpha = \beta \\ S + T\beta = \gamma \\ S + T\gamma = \alpha \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} S + T\alpha = \gamma \\ S + T\beta = \alpha \\ S + T\gamma = \beta \end{cases}$$

Również w tym przypadku otrzymujemy $\alpha = \beta = \gamma = S/(1 - T)$. Ostatecznie zatem, trójkąt ABC jest równoboczny. □

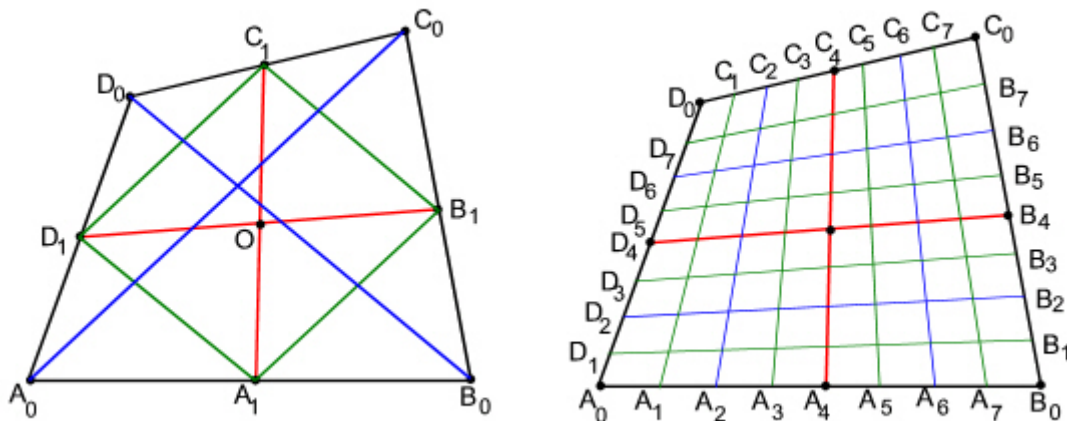
Zadanie 14. Wszystkie boki wypukłego czworokąta podzielono na 2^n równych części. Następnie narysowano „szachownicę” łącząc odcinkami odpowiadające punkty przeciwległych boków i kolorując na przemian pola otrzymanej siatki na biało lub czarno.

- a) Wykazać, że każdy z narysowanych odcinków jest podzielony odcinkami poprzecznymi na 2^n równych części,
 b) Wykazać, że suma pól białych czworokątów jest równa sumie pól czarnych czworokątów.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez A_0, B_0, C_0, D_0 wierzchołki danego czworokąta. Punkty podziału boków czworokąta na 2^n równych części oznaczmy kolejno przez $A_1, A_2, \dots, A_{2^n-1}, \dots, D_{2^n-1}$ (zob. rysunek poniżej). Symbolem $[XYZ \dots]$ oznaczmy pole wielokąta $XYZ \dots$.

Najpierw rozważymy przypadek, gdy $n = 1$. Punkty A_1, B_1, C_1, D_1 są środkami odpowiednich boków czworokąta $A_0B_0C_0D_0$, więc $A_1B_1 \parallel A_0C_0 \parallel D_1C_1$ i $A_1D_1 \parallel B_0D_0 \parallel B_1C_1$. Czworokąt $A_1B_1C_1D_1$ jest zatem równoległobokiem. W szczególności, O jest środkiem odcinków A_1C_1 i B_1D_1 .



Zauważmy, że $[B_1C_0C_1] = \frac{1}{4}[B_0C_0D_0]$ oraz $[A_0A_1D_1] = \frac{1}{4}[A_0B_0D_0]$. Tak więc

$$[B_1C_0C_1] + [A_0A_1D_1] = \frac{1}{4}[A_0B_0C_0D_0].$$

Analogicznie stwierdzamy, że

$$[A_1B_0B_1] + [C_1D_0D_1] = \frac{1}{4}[A_0B_0C_0D_0].$$

Wynika stąd, że $[A_1B_1C_1D_1] = \frac{1}{2}[A_0B_0C_0D_0]$, a więc

$$[A_1OB_1] = [B_1OC_1] = [C_1OD_1] = [D_1OA_1] = \frac{1}{8}[A_0B_0C_0D_0].$$

Ostatecznie zatem

$$[A_0A_1OD_1] + [B_1C_0C_1O] = [A_1B_0B_1O] + [D_1OC_1D_0] = \frac{1}{2}[A_0B_0C_0D_0].$$

To kończy dowód a) i b) dla $n = 1$. Dalej posłużymy się indukcją matematyczną. Załóżmy, że teza zadania zachodzi dla $k = 1, \dots, n - 1$ gdzie $n \geq 2$ i rozważmy podział boków czworokąta $A_0B_0C_0D_0$ na 2^n równych części. Punkty $A_{2^i}, B_{2^i}, C_{2^i}, D_{2^i}$ dla $i = 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1$ wyznaczają podział każdego boku czworokąta na 2^{n-1} równych części. Na mocy założenia indukcyjnego odcinki $A_{2^i}C_{2^i}$ i $B_{2^i}D_{2^i}$ dzielą się wzajemnie na 2^{n-1} równych części. Możemy teraz zastosować

założenie indukcyjne do czworokątów $A_0B_0B_{2^{n-1}}D_{2^{n-1}}$ i $D_{2^{n-1}}B_{2^{n-1}}C_0D_0$, których boki są podzielone na 2^{n-1} równych części odcinkami $A_{2^i}C_{2^i}$ oraz B_jD_j . Tak więc odcinki B_jD_j (dla $j = 1, 2, \dots, 2^n - 1$) są podzielone odcinkami $A_{2^i}C_{2^i}$ na 2^{n-1} równych części oraz odcinki $A_{2^i}C_{2^i}$ są podzielone odcinkami B_jD_j na 2^n równych części. Ostatnim krokiem jest analogiczne zastosowanie założenia indukcyjnego do czworokątów $A_0A_{2^{n-1}}C_{2^{n-1}}D_0$ i $A_{2^{n-1}}B_0C_0C_{2^{n-1}}$. Ostatecznie odcinki A_iC_i oraz B_jD_j dzielą się wzajemnie na 2^n równych części, co kończy dowód części a). Na podstawie części a) czworokąt $A_0B_0C_0D_0$ jest podzielony odcinkami $A_{2^i}C_{2^i}$ i $B_{2^i}D_{2^i}$ na $2^{2(n-1)}$ czworokątów, a każdy z tych czworokątów jest podzielony liniami $A_{2^{i-1}}C_{2^{i-1}}$ i $B_{2^{i-1}}D_{2^{i-1}}$ na cztery czworokąty: dwa białe i dwa czarne. Na podstawie rozpatrzonego wyżej przypadku $n = 1$ z łatwością stwierdzamy teraz, że pola białe mają takie same łączne pole jak pola czarne.

□

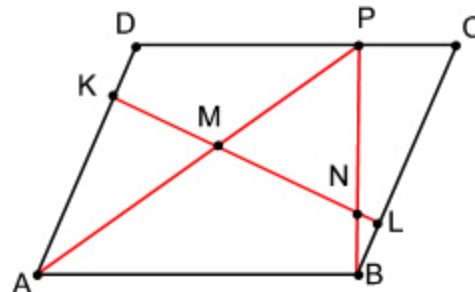
Zadanie 15. Na bokach AD i BC równoległoboku $ABCD$ obrano punkty K i L tak, że $AK = LC$. Niech P będzie dowolnym punktem leżącym na boku CD . Prosta KL przecina proste AP i BP odpowiednio w punktach M i N . Wykazać, że trójkąt MNP ma pole równe sumie pól trójkątów AKM i BLN .

Rozwiązanie

Oznaczmy przez $[XYZ\dots]$ pole wielokąta $XYZ\dots$. Ponieważ czworokąty $ABLK$ i $LKCD$ są przystające,

$$[ABLK] = \frac{1}{2}[ABCD].$$

Zatem $[AKM] + [BLN] = \frac{1}{2}[ABCD] - [ABNM]$. Z drugiej strony $[ABP] = \frac{1}{2}[ABCD]$, a więc $[MNP] = \frac{1}{2}[ABCD] - [ABNM]$. Stąd wynika, że $[AKM] + [BLN] = [MNP]$.



□

[opr. pg]