



XVI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy trzecie

9 marca 2024 r.

1. Wyznacz wszystkie pary (x, y) dodatnich liczb całkowitych dla których liczba

$$(x + y) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

jest całkowita.

2. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, \dots spełniający warunek $a_1 = 1$ oraz taki, że dla każdego $n \geq 1$ zachodzi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 \cdot a_n.$$

Wyznacz wartość wyrazu a_{2024} . Odpowiedź uzasadnij.

3. Dany jest podzbiór \mathcal{P} liczb naturalnych taki, że $1 \in \mathcal{P}$, $2 \in \mathcal{P}$, oraz dla każdej liczby naturalnej $k > 1$ istnieje liczba $p \in \mathcal{P}$ taka, że $k < p < 2k$. Udowodnij, że każda liczba naturalna jest sumą różnych liczb należących do zbioru \mathcal{P} . *Uwaga: uznajemy, że jeśli liczba należy od \mathcal{P} , to jest automatycznie sumą różnych liczb z \mathcal{P} .*

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ utworzono sześć czworokątów $ABCD$, $BCDE$, $CDEF$, $DEFA$, $EFAB$, $FABC$. Okazało się, że wszystkie one mają jednakowe pole. Pokaż, że przekątne AD , BE , CF mają punkt wspólny.

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie konkurs.wi.pb.edu.pl do 12 marca 2024 r.
6. W tym roku tradycyjnego zakończenia konkursu nie przewidujemy; nagrody zostaną dostarczone do szkół.