Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy drugie

30 maja 2009 r.

1. Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg o środku O. Dwusieczna kąta $\measuredangle BAC$ przecina ten okrąg w punkcie D. Punkt E jest symetryczny do punktu D względem prostej OC. Jaka jest miara kąta $\measuredangle BAC$, jeśli wiadomo, że punkty B, O i E są współliniowe?

2. Niech $k > 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Ciąg liczbowy $x_1, x_2, \ldots$ określony jest warunkami: $x_1 = k$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ dla $n \geqslant 1$. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ liczba

$$\frac{x_n^2 - 4}{k^2 - 4}$$

jest kwadratem liczby naturalnej.

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ należących do przedziału $[0, 2]$ zachodzą nierówności

$$-\frac{1}{4} \leqslant \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant 2.$$

4. Ściany sześcianu o krawędzi długości 3 podzielono na kwadraty o boku długości 1. Wyznaczyć liczbę najkrótszych łamanych, które zbudowane są z boków tych kwadratów i łączą dwa przeciwległe (czyli najbardziej odległe od siebie) wierzchołki sześcianu.

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).

2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.

3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.

4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów komórkowych.

5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej `http://signum.pb.bialystok.pl` w dniu 2 czerwca 2009 r.