



## VI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

### Zadania konkursowe - klasy drugie

17 maja 2014 r.

1. W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  najdłuższą wysokością jest  $AH$ . Punkt  $M$  jest środkiem boku  $AC$ . Wykazać, że jeśli  $AH = BM$ , to kąt  $ABC$  ma miarę nie większą od  $60^\circ$ .

2. Uzasadnić, że dla dowolnych liczb  $x, y, z$  należących do przedziału  $[0, 1]$  zachodzi nierówność

$$(x + y + z + 1)^2 \geq 4(x^2 + y^2 + z^2).$$

3. Udowodnić, że równanie  $x^3 + y^3 = z^2$  ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich  $x, y, z$ .

4. Na tablicy zapisany jest wielomian

$$\square x^{2014} + \square x^{2013} + \dots + \square x^1 + \square.$$

Piotr i Paweł grają w grę. Ruch polega na wybraniu jednego ze współczynników wielomianu tzn. wpisaniu w jedno z pól oznaczonych  $\square$  wybranej przez siebie (dowolnie) liczby rzeczywistej. Gracze wykonują ruchy naprzemiennie. Zaczyna Piotr. Gra kończy się po wybraniu wszystkich współczynników wielomianu. Paweł wygrywa, jeżeli otrzymany wielomian ma pierwiastek rzeczywisty, w przeciwnym razie wygrywa Piotr. Który z nich ma strategię wygrywającą? Odpowiedź uzasadnić.

*Gracz ma strategię wygrywającą, jeżeli wygrywa każdą rozgrywkę (o ile gra optymalnie).*

#### Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów komórkowych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej

<http://konkurs.ptm.pb.edu.pl/> w dniu 21 maja 2014 r.