



## VIII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

### Zadania konkursowe - klasy drugie

14 maja 2016 r.

1. Dany jest trójkąt  $ABC$ . Na prostej  $AC$  wyznacz punkt  $M$  taki, że suma promieni okręgów opisanych na trójkątach  $ABM$  oraz  $CBM$  jest najmniejsza. Odpowiedź uzasadnij.

2. Dla jakich wartości parametru rzeczywistego  $a$  wielomian  $x^3 - 6x^2 + ax - 8$  ma trzy pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2, x_3$  spełniające równość

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 3 ?$$

Odpowiedź uzasadnij.

3. Niech  $M$  będzie maksymalną odległością, zaś  $m$  minimalną odległością między wierzchołkami pewnego czworokąta wypukłego. Wykaż, że  $M \geq \sqrt{2} \cdot m$ .

4. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych  $(a, b)$  takich, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych  $n$  liczba

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^n + \left(b + \frac{1}{2}\right)^n$$

jest całkowita.

#### Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie [konkurs.ptm.pb.edu.pl](http://konkurs.ptm.pb.edu.pl) w dniu 18 maja 2016 r. Na tej stronie każdy z uczestników będzie mógł sprawdzić swoje wyniki, wpisując 7-cyfrowy kod umieszczony na kartce z numerem.
6. Zakończenie konkursu odbędzie się dnia 3 czerwca 2016 r.