



V Konkurs Matematyczny  
Politechniki Białostockiej  
Zadania konkursowe - klasy pierwsze

27 kwietnia 2013 r.

1. Dane są cztery liczby dodatnie  $a, b, c, d$ . Wykazać, że przynajmniej jedna z liczb

$$\frac{a+b+c}{d}, \frac{b+c+d}{a}, \frac{a+c+d}{b}, \frac{a+b+d}{c}$$

jest nie większa od 3 i przynajmniej jedna jest nie mniejsza od 3.

2. Każdemu wierzchołkowi sześcianu  $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$  przypisano liczbę zero lub jeden. Jedynek przypisano dwóm przeciwległym wierzchołkom podstawy  $A_1$  i  $C_1$ , zaś wszystkim pozostałym przypisano zera. Przez „ruch“ rozumiemy dodanie jedynki do liczb przypisanych końcom wybranej krawędzi sześcianu. Czy po wykonaniu pewnej ilości „ruchów“ można uzyskać równe liczby w każdym wierzchołku sześcianu?

3. Uzasadnić, że nie istnieje taka liczba pierwsza  $p$  i liczba  $x$ , że liczby

$$x, \quad x+p, \quad x+2p-1$$

są kwadratami liczb całkowitych dodatnich.

4. Krawędzie  $AB, AC$  i  $AD$  czworościanu  $ABCD$  są średnicami trzech kul. Wykazać, że ściana  $BCD$  jest zawarta w sumie tych kul (tzn. każdy punkt tej ściany należy do wnętrza lub brzegu pewnej z tych kul).

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów komórkowych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej <http://konkurs.ptm.pb.edu.pl/> w dniu 7 maja 2013 r.