Podlaski Konkurs Matematyczny

Zadania konkursowe - klasy drugie

22 maja 2004 r.

1. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2 + 5n + 1$ nie jest podzielna przez 49.

2. Liczby rzeczywiste a, b, c są pierwiastkami wielomianu $x^3 + px^2 + qx + 2$ o współczynnikach całkowitych. Niech

$$A = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}, \quad B = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \quad \text{oraz} \quad C = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}.$$

Wykazać, że jeśli A jest liczbą całkowitą, to również liczby B i C są całkowite.

3. W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono prostą równoległą do boku $\overline{AB}$, przecinającą boki $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ odpowiednio w punktach K i L. Następnie wybrano środek M odcinka $\overline{AK}$ oraz środek ciężkości S trójkąta KCL. Wykazać, że kąt $\measuredangle BMS$ jest prosty.

4. Niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Dla dowolnego niepustego podzbioru X zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ oznaczmy przez $m(X)$ sumę najmniejszej liczby należącej do X i największej liczby należącej do X. Niech S będzie sumą wszystkich liczb $m(X)$, gdzie $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ (tzn. X przebiega wszystkie niepuste podzbiory zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$). Wykazać, że liczba S jest podzielna przez $n + 1$.

Uwaga. Jeśli $X = \{k\}$ jest podzbiorem jednoelementowym, to przyjmujemy, że k jest zarówno najmniejszą jak i największą liczbą w X, czyli $m(X) = 2k$.

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).

2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.

3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.

4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.

5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej `http://www.ptm.pb.bialystok.pl` w dniu 26 maja 2004r.