Podlaski Konkurs Matematyczny

Zadania konkursowe - klasy drugie

26 maja 2007 r.

1. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a, dla których wielomiany $f(x) = x^5+ax^3+x^2+1$ i $g(x) = x^4 + ax^2 + x + 1$ mają wspólny pierwiastek.

2. Niech a i b będą ustalonymi liczbami naturalnymi i niech $\{x_n\}$ będzie ciagiem określonym wzorem

$$x_n = an + b \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wykazać, że albo żaden wyraz ciągu $\{x_n\}$ nie jest kwadratem liczby naturalnej, albo w ciągu tym istnieje nieskończenie wiele wyrazów, które są kwadratami liczb naturalnych.

3. Na prostej ℓ, w której zawarty jest bok BC trójkąta ABC, wybrano punkt M różny od B i C. Punkty K i L są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABM i AMC. Wykazać, że pole trójkąta KLM jest nie mniejsze niż jedna czwarta pola trójkąta ABC. Przy jakim położeniu punktu M trójkąt KLM ma najmniejsze pole?

4. Dla danej liczby naturalnej $n > 1$, niech $f(n)$ oznacza liczbę wszystkich par liczb naturalnych (x, y) spełniających równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$

Wykazać, że $f(n) \geqslant 3$ oraz wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których $f(n) = 3$.

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).

2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.

3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.

4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów komórkowych.

5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej `http://www.ptm.pb.bialystok.pl` w dniu 29 maja 2007r.