ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE

1. KOMBINATORYKA

Zadanie 1. W turnieju szachowym uczestniczy 30 zawodników (gra każdy z każdym jedną partię). Wykazać, że w dowolnej chwili trwania turnieju pewnych dwóch szachistów rozegrało tyle samo partii.

Zadanie 2. Wykazać, że wśród dowolnych 101 liczb całkowitych istnieją dwie których różnica jest podzielna przez 100.

Zadanie 3. W każdym z 500 koszy znajdują się jabłka, przy czym w koszu mieści się nie więcej niż 240 jabłek. Wykazać, że w przynajmniej trzech koszach jest taka sama liczba jabłek.

Zadanie 4. W trzydziestoosobowej klasie 20 uczniów uczy się języka angielskiego, 14 niemieckiego oraz 10 francuskiego. Żadne dziecko nie uczy się wszystkich trzech języków, a ośmioro nie uczy się żadnego z tych języków. Ilu uczniów uczy się zarówno języka niemieckiego jak i francuskiego?

Zadanie 5. Węnątrz kwadratu o boku 1 umieszczono pewną ilość okręgów o sumie obwodów równej 10. Wykazać, że istnieje prosta przecinająca przynajmniej 4 okręgi.

Zadanie 6. Ile różnych par rozłącznych podzbiorów posiada zbiór składający się z 2003 elementów?

Zadanie 7. Wewnątrz trójkata równobocznego o boku 1 wybrano pięć punktów. Wykazać, że odległość między pewnymi dwoma punktami jest mniejsza od $0,5$.

Zadanie 8. Czy szachownicę 10×10 można pokryć 25 jednakowymi płytkami w kształcie:
a) prostokąta rozmiarów 1×4?
b) litery T składającej się z czterech kwadratów 1×1?
c) litery L składającej się z czterech kwadratów 1×1?

Zadanie 9. Na ile sposobów można wybrać $m + n$ kul spośród $2m$ jednakowych kul białych i $2n$ jednakowych kul czarnych?

Zadanie 10*. Na konkurs matematyczny przybyło n uczniów. Są wśród nich osoby znające się wzajemnie, przy czym każde dwie osoby znające się nie mają wspólnych znajomych oraz każde dwie osoby nie znające się mają dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Wykazać, że każdy z uczniów ma taką samą liczbę znajomych wśród uczestników konkursu.

2. ZADANIA ARYTMETYCZNE

Zadanie 11. Wykazać, że jeśli $p > 3$ jest liczbą pierwszą, to liczba $p^2 - 1$ dzieli się przez 24.

Zadanie 12. a) Wykazać, że jeśli x, y są liczbami całkowitymi oraz 3 dzieli $x^2 + y^2$, to liczby x i y są podzielne przez 3.
b) Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite x, y, z spełniajace równanie $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Zadanie 13. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 120.

Zadanie 14. a) Czy liczba postaci $4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) może być przedstawiona w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych?

b) Wykazać, że jeśli każda z liczb a, b jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych, to ab jest także sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

Zadanie 15. Suma cyfr liczby trzycyfrowej A jest równa 7. Wykazać, że 7 dzieli A wtedy i tylko wtedy, gdy A ma równe cyfry dziesiątek i jedności.

Zadanie 16. Na ile sposobów można przedstawić liczbę 2003 w postaci sumy pewnej ilości kolejnych liczb naturalnych?

Zadanie 17. Wykazać, że jeśli a, b są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, to równanie $ax + by = ab$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x, y.

Zadanie 18. Rozwiązać w liczbach całkowitych równania:
a) $xy = x + y$,
b) $6x^2 + 5y^2 = 74$,
c) $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 6xyz$.

Zadanie 19. Liczba A zapisana w systemie siódemkowym ma trzy cyfry, zaś zapisana w systemie dziewiątkowym ma te same trzy cyfry, ale występują one przeciwnym porządku. Jaka to liczba?

Zadanie 20*. Wykazać, że istnieje 100-cyfrowa liczba podzielna przez 2^{100} w zapisie dziesiętnym której występują tylko cyfry 1 i 2.

3. FUNKCJE, WIELOMIANY, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

Zadanie 21. Wyznaczyć a, b tak aby wielomian $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$ był kwadratem innego wielomianu.

Zadanie 22. Wykazać, że dla dowolnych liczb $a, b, c, x, y, z...$ zachodzą nierówności:
a) $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$,
b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$,
c) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + ac + bc)$, gdzie a, b, c są długościami boków trójkąta. Czy ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c?
d) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \sqrt{(a + x)^2 + (b + y)^2 + (c + z)^2}$.

Zadanie 23. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb dodatnich spełniające równanie:

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} = \frac{1}{xy}.$$

Zadanie 24. a) Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

b) Wykazać, że jeśli $x \neq 1$, to

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

c) Wykazać, że równanie

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

gdzie $a_i \in \{-1, 0, +1\}$ nie ma rozwiązań w zbiorze $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Zadanie 25. a) Wykazać, że dla dowolnych liczb nieujemnych x, y, z zachodzi nierówność:

$$x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

b) Wykazać, że nierówność

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12$$

zachodzi dla wszystkich wartości $x \in \mathbb{R}$, dla których lewa strona jest określona.

Zadanie 26. Czy istnieje funkcja $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taka, że

$$f(f(x)) = x + 1 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{Z},$$

gdzie $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych.

Zadanie 27. Niech liczby x, y będą takie, że $x > y$ oraz $xy = 1$. Udowodnić, że zachodzi nierówność:

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}.$$

Zadanie 28. Rozwiązać układ równań:

$$\frac{xy}{x+y} = a, \qquad \frac{xz}{x+z} = b, \qquad \frac{yz}{y+z} = c,$$

gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi.

Zadanie 29. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c że wykresy funkcji

$$y = ax + b, \qquad y = bx + c, \qquad y = cx + a$$

mają punkt wspólny. Wykazać, że $a = b = c$.

Zadanie 30. Wyznaczyć zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają nierówność:

$$2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(1-x^2)^2 + (1-y^2)^2} > 0.$$

4. ZADANIA GEOMETRYCZNE

Zadanie 31. Na przekątnej BD kwadratu $ABCD$ wybrano punkt E. Punkty O_1, O_2 są odpowiednio środkami okręgów opisanych na trójkątach ABE, ADE. Dowieść, że czworokąt AO_1EO_2 jest kwadratem.

Zadanie 32. Na płaszczyźnie wybrano cztery punkty tak, że nie leżą one ani na jednej prostej ani na jednym okręgu. Wykazać, pewien z tych punktów położony jest wewnątrz okręgu do którego należą trzy pozostałe.

Zadanie 33. Dwusieczne AK i BM trójkata ABC przecinają się w punkcie O. Wykazać, że jeśli $OK = OM$, to albo $\angle BAC = \angle ABC$ albo $\angle ACB = 60°$.

Zadanie 34. Punkty A, B, C, D należą do okręgu o promieniu R i dzielą go na cztery równe części. Wykazać, że jeśli X jest dowolnym punktem tego okręgu, to suma $AX^4 + BX^4 + CX^4 + DX^4$ nie zależy od położenia punktu X.

Zadanie 35. Okrąg o jest styczny do dwóch boków trójkąta ABC oraz do dwóch jego środkowych. Wykazać, że trójkąt ABC jest równoramienny.

Zadanie 36. Cięciwa okręgu jest oddalona od jego środka o d. W każdy z dwóch segmentów składających się z cięciwy oraz łuku okręgu wpisano kwadrat, którego dwa wierzchołki leżą na cięciwie oraz dwa na okręgu. Obliczyć różnicę długości boków kwadratów.

Zadanie 37. Wykazać, że w dowolnym trójkącie suma długości jego środkowych jest mniejsza od obwodu oraz większa od $3/4$ obwodu tego trójkąta.

Zadanie 38. Promień okręgu wpisanego w dany trójkąt jest równy 1. Wykazać, że pewna wysokość tego trójkąta ma długość nie mniejszą od 3.

Zadanie 39. Dane dwa kwadraty podzielić na części tak aby można było z nich złożyć jeden kwadrat (wykorzystując do tego każdą część).

Zadanie 40. Wewnątrz danego kąta wybrano punkt. Poprowdzić przez ten punkt prostą wycinającą z kąta trójkąt o możliwe najmniejszym polu.

5. ZADANIA RÓŻNE

Zadanie 41. Czy na płaszczyźnie można wybrać 6 punktów i połączyć je nieprzecinającymi się odcinkami, tak aby każdy punkt był połączony z dokładnie czterema innymi?

Zadanie 42. Na płaszczyźnie dany jest zbiór n-punktów o tej własności, że wśród każdych czterech punktów pewne trzy są współliniowe. Udowodnić, że w tym zbiorze jest przynajmniej $n-1$ punktów leżących na jednej prostej.

Zadanie 43. Prostokąt rozmiarów $2n \times 2m$ pokryto całkowicie kostkami domino rozmiarów 1×2. Czy na to pokrycie można nałożyć drugą warstwę kostek domino tak, że żadna kostka drugiej warstwy nie leży całkowicie na pewnej kostce pierwszej warstwy?

Zadanie 44. Odcinek długości 1 pokryto całkowicie innymi odcinkami. Wykazać, że wśród odcinków pokrywających można wybrać pewną ilość odcinków parami rozłącznych o łącznej długości nie mniejszej niż $1/2$.

Zadanie 45. Ile dzielników ma liczba $2^n 3^m 5^k$, gdzie m, n, k są nieujemnymi liczbami całkowitymi?

Zadanie 46. W pola kwadratowej tablicy $n \times n$ wpisano liczby całkowite nieujemne tak, że jeśli na przecięciu pewnego wiersza i kolumny stoi zero to łączna suma liczb tego wiersza i tej kolumny jest nie mniejsza od n. Wykazać, że suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2}n^2$.

Zadanie 47. Iloczyn dziesięciu (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych jest równy 10^{10}. Jaką największą wartość może przyjąć suma tych liczb?

Zadanie 48. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Zadanie 49. Obliczyć sumę wszystkich liczb, które można otrzymać z liczby 1234567 dokonując wszystkich możliwych przestawień cyfr.

Zadanie 50. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające warunek:

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y},$$

o ile tylko $x + y \neq 0$.