

PODLASKI KONKURS MATEMATYCZNY 2005
ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE

KLASY PIERWSZE

Zadanie 1. Niech $N = \underbrace{999 \dots 99}_{n \text{ dziewiątek}}$. Obliczyć sumę cyfr liczby N^3 .

Zadanie 2. a) Wykazać, że jeśli $p > 3$ jest liczbą pierwszą, to liczba $p^2 - 1$ dzieli się przez 24.

b) Wykazać, że jeśli $p > 5$ jest liczbą pierwszą, to liczba $p^4 - 1$ dzieli się przez 240.

Zadanie 3. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $5^x = 3y + 7$.

Zadanie 4. Która z liczb

$$1, \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$$

jest większa?

Zadanie 5. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3 \\ \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Zadanie 6. Dla liczby naturalnej $n \geq 2$ wyznaczyć wszystkie ciągi (x_1, x_2, \dots, x_n) takie, że każda z liczb x_i jest równa kwadratowi sumy wszystkich pozostałych liczb.

Zadanie 7. Jaką minimalną wartość może przyjąć suma długości przekątnych czworokąta wypukłego o polu S ?

Zadanie 8. Liczby x, y, z są takie, że $x + y + z = 0$ oraz $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Wykazać, że przynajmniej jedna z liczb xy, yz, zx jest nie większa niż $-1/3$.

Zadanie 9. Trener tenisa, opiekujący się grupą 16 zawodników, zaplanował 12 gier kontrolnych między tymi zawodnikami. Według przygotowanego planu każdy z zawodników rozegra przynajmniej jeden mecz. Wykazać, że pewne cztery mecze mogą być rozegrane w tym samym czasie (oczywiście na czterech różnych kortach).

Zadanie 10. a) W turnieju piłkarskim uczestniczy 6 zespołów. Każdy z każdym rozgrywa jeden mecz. Rozgrywki odbywają się w dwóch miastach. Udowodnić, że pewne trzy zespoły rozegrają wszystkie mecze między sobą w jednym mieście.

b) W turnieju piłkarskim uczestniczy 18 zespołów. Każdy z każdym rozgrywa jeden mecz. Rozgrywki odbywają się w trzech miastach. Udowodnić, że pewne trzy zespoły rozegrają wszystkie mecze między sobą w jednym mieście.

Zadanie 11. Z pola E1 do pola E8 szachownicy król może dojść w siedmiu ruchach. Ilość różnych drógami może to zrobić?

Zadanie 12. Udowodnić, że każdy trójkąt można podzielić na 2005 trójkątów równoramiennych.

Zadanie 13. W trójkąt ABC wpisano okrąg. Punkty styczności okręgu z bokami trójkąta oznaczono odpowiednio przez A_1, B_1, C_1 , przy czym $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$. Następnie w trójkąt $A_1B_1C_1$ wpisano okrąg, a punkty styczności oznaczono odpowiednio przez A_2, B_2, C_2 . Czynność tę powtórzono n razy, otrzymując w końcu trójkąt $A_nB_nC_n$. Okazało się, że trójkąty ABC i $A_nB_nC_n$ są podobne. Wyznaczyć miary ich kątów.

- Zadanie 14.** Wszystkie boki wypukłego czworokąta podzielono na 2^n równych części. Następnie narysowano „szachownicę” łącząc odcinkami odpowiadające punkty przeciwległych boków i kolorując na przemian pola otrzymanej siatki na białe lub czarne.
- Wykazać, że każdy z narysowanych odcinków jest podzielony odcinkami poprzecznymi na 2^n równych części,
 - Wykazać, że suma pól białych czworokątów jest równa sumie pól czarnych czworokątów.
- Zadanie 15.** Na bokach AD i BC równoległoboku $ABCD$ obrano punkty K i L tak, że $AK = LC$. Niech P będzie dowolnym punktem leżącym na boku CD . Prosta KL przecina proste AP i BP odpowiednio w punktach M i N . Wykazać, że trójkąt MNP ma pole równe sumie pól trójkątów AKM i BLN .