



Podlaski Konkurs Matematyczny 2006  
Zadania przygotowawcze - klasy pierwsze

**Zadanie 1.** Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{a^2 + b^2}{ab},$$

gdzie  $a, b$  są dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

**Zadanie 2.** Dla danych liczb naturalnych  $n > k$  wyznaczyć sumę:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

**Zadanie 3.** Liczby rzeczywiste  $a, b, c$  są takie, że  $a + b + c = 0$ . Wykazać, że

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

**Zadanie 4.** Czy istnieją liczby pierwsze  $p, q, r$  takie, że

$$p^2 + q^3 = r^4 ?$$

**Zadanie 5.** Wszystkie cyfry liczby sześciocyfrowej  $a$  podzielnej przez 37 są różne i żadna z nich nie jest zerem. Wykazać, że przestawiając cyfry liczby  $a$  można utworzyć przynajmniej 23 inne liczby podzielne przez 37.

**Zadanie 6.** Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  liczba  $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$  jest podzielna przez 8.

**Zadanie 7.** a) Jakie warunki powinny spełniać liczby całkowite  $a$  i  $b$  aby liczby  $P(x) = x^2 + ax + b$  były parzyste dla wszystkich wartości całkowitych  $x$ ?  
b) Jakie warunki powinny spełniać liczby całkowite  $a$  i  $b$  aby liczby  $Q(x) = x^3 + ax + b$  były podzielne przez 3 dla wszystkich wartości całkowitych  $x$ ?

**Zadanie 8.** W trójkąt  $ABC$  wpisano okrąg styczny do boków  $AB, BC, CA$  w punktach  $C_1, A_1, B_1$  odpowiednio. Wykazać, że jeśli odcinki  $AA_1, BB_1$  i  $CC_1$  są równej długości, to trójkąt  $ABC$  jest równoboczny.

**Zadanie 9.** W danym trójkącie dwa boki mają długości  $a$  i  $b$ , zaś wysokości opuszczone na te boki mają odpowiednio długości  $h_a$  i  $h_b$ . Wykazać, że jeśli  $a > b$ , to

$$a + h_a \geq b + h_b.$$

**Zadanie 10.** Wykazać, że suma odległości między środkami przeciwległych boków czworokąta jest równa połowie jego obwodu wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt jest równoległobokiem.

**Zadanie 11.** W trójkącie  $T$  suma długości jego wysokości jest równa  $9r$ , gdzie  $r$  jest długością promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że  $T$  jest trójkątem równobocznym.

**Zadanie 12.** W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość  $h$ , zaś dwusieczna kąta prostego ma długość  $m$ . Obliczyć pole tego trójkąta.

**Zadanie 13.** Suma dziesięciu liczb naturalnych  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  jest równa 1001. Wyznaczyć możliwie największą wartość największego wspólnego dzielnika tych liczb.

**Zadanie 14.** Wierzchołki wypukłego czworokąta  $C$  leżą na różnych bokach kwadratu  $1 \times 1$ . Wykazać, że obwód czworokąta  $C$  jest nie mniejszy niż  $2\sqrt{2}$ .

**Zadanie 15.** Kwadrat i trójkąt mają równe pola. Która z tych figur ma większy obwód?