Podlaski Konkurs Matematyczny 2006

Zadania przygotowawcze - klasy drugie

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, które są 11 razy większe od sumy swoich cyfr.

Zadanie 2. Niech $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x. Wykazać, że jeśli $\{a\} + \{1/a\} = 1$, to a nie jest liczbą wymierną.

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli n jest liczbą naturalną oraz $0 \leqslant x < 1$, to

$$1 - x^{2n} > 2nx^n(1 - x).$$

Zadanie 4. Dla danej liczby naturalnej n wyznaczyć sumę:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} \ .$$

Zadanie 5. Na płaszyźnie dany jest skończony zbiór wielokątów taki, że każde dwa wielokąty mają punkt wspólny. Wykazać, że istnieje prosta mająca punkty wspólne z każdym z wielokątów.

Zadanie 6. Punkty M, P są środkami boków BC i CD wypukłego czworokąta $ABCD$. Wykazać, że jeśli $AP + AM = a$, to czworokąt $ABCD$ ma pole mniejsze niż $a^2/2$.

Zadanie 7. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}f(x)$$

dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że f jest funkcją okresową.

Zadanie 8. W czworokącie $ABCD$ o polu S obrano punkt O taki, że

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2S.$$

Wykazać, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, zaś O jest jego środkiem.

Zadanie 9. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (przy czym $n \geqslant 2$) są dodatnie oraz $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Jaką minimalną wartość może przyjąć iloczyn

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \ \ ?$$

Zadanie 10. Znaleźć wszystkie liczby całkowite x, y, z spełniające równanie:

$$2x^4 + y^4 = 7z^4 \ .$$

Zadanie 11. W pola kwadratowej tablicy $n \times n$ wpisano symetrycznie względem głównej przekątnej (tzn. przekątnej łączącej lewy górny róg tablicy z jej prawym dolnym rogiem) liczby $1, 2, 3, \ldots, n$ tak, że w każdej kolumnie i każdym wierszu tablicy znajdują się różne liczby. Wykazać, że liczby na głównej przekątnej tablicy też są różne.

Zadanie 12. Dany jest trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Na podstawie AB obieramy punkt K, zaś na podstawie CD punkt L. Niech $\mathcal{C}$ będzie częścią wspólną trójkątów ALB i CKD. Przy jakim położeniu punktów K i L figura $\mathcal{C}$ ma największe pole?

Zadanie 13. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, gdzie $a_i \in \{-1, 1\}$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$, mające n pierwiastków rzeczywistych.

Zadanie 14. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Wiadomo, że pewna potęga liczby p ma 20 cyfr. Wykazać, że wśród tych cyfr przynajmniej trzy są jednakowe.

Zadanie 15. W przestrzeni wybrano $2n$ punktów tak, że żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Następnie połączono pewne punkty tworząc $n^2 + 1$ odcinków. Wykazać, że pewne trzy odcinki tworzą trójkąt.